Les complexes

1 Définition

- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe s'écrit de la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$
- a est la partie réelle, notée $Re(z)$ et b est la partie imaginaire, notée $Im(z)$.

2 Trinôme

- Une équation du second degré à coefficients réels admet dans $\mathbb{C}$:
  - 1 ou 2 soluions réelles si et seulement si $\Delta \geq 0$
  - 2 solutions complexes si et seulement si $\Delta < 0$. Ces solutions sont : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$, avec $\delta = \Delta^2$

3 Conjugué

3.1 Définition

- Le conjugué d'un nombre complex $z = a + ib$ est : $\overline{z} = a - ib$.

3.2 Propriétés

- $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$ donc $z \times \overline{z} \in \mathbb{R}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- Si $z_2 \neq 0$: $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = \overline{-z}$

4 Module

4.1 Définition

- Le module d'un nombre complexe d'image M est la distance OM. On note : $OM = |z|$.
- On a : $|z| = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
- $AB = |z_b - z_a|$

4.2 Propriétés

- $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ et $z\overline{z} = |z|^2$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ (pour $z \neq 0$) et $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (pour $z_2 \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (identité triangulaire)

5 Argument

- $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$ (propriété fondamentale !)
- $\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$ et $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{ED}) = \arg(\frac{z_D - z_E}{z_B - z_A})$
- z réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- z réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$

6 Forme trigonométrique et forme exponentielle

- Forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (θ étant l'argument de z).
- Forme exponentielle : $z = |z|e^{i\theta}$

7 Trigonométrie

- Formules d'Euler : $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$
- Corollaire : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
- Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- D'où :
  - $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
  - $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
  - etc... (il suffit d'appliquer la formule de Moivre pour retrouver les propriétés de trigonométrie).

8 Ecritures complexes de transformations

- Translation de vecteur $\overrightarrow{W}(w)$: $z' = z + w$
- Homothétie de centre $H(h)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) : $z' = k(z-h) + h$
- Rotation de centre $C(c)$ et d'angle θ ($\theta \in \mathbb{R}$) : $z' = e^{i\theta}(z-c) + c$
- Equation paramétrique d'un cercle de centre Ω et de rayon R : $z = z_\Omega + Re^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$ (θ est le paramètre).