Fonction exponentielle et équations différentielles

1 Fonction exponentielle

1.1 Définition

- La fonction exponentielle, notée exp est la fonction définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tel que : $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.
- On a : $\exp(1) \approx 2,718$
- Notation souvent utilisée : $\exp(x) = e^x$
- remarque : $e^x > 0$ pour tout x réel.

1.2 Propriétés

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; donc on a aussi : $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$; donc on a aussi : $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $x^n = e^{n \times \ln(x)}$

1.3 Dérivée

- $(e^x)' = e^x$
- $(e^u)' = u' \times e^u$

1.4 Intégrale

- $\int e^x dx = e^x + k$
- $\int u' e^u dx = e^u + k$

1.5 Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

1.6 Fonction exponentielle de base a ($a > 0$)

- C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$
- Si $0 < a < 1$ alors la fonction est décroissante, mais si $a > 1$ alors elle est croissante.

2 Equations différentielles

2.1 Définition

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ une équation du type $y' = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = af(x) + b$.

2.2 Résoudre $y' = ay$

- Les solutions sont de la forme : $f(x) = ke^{ax}$; $k \in \mathbb{R}$

2.3 Résoudre $y' = ay + b$

- Les solutions sont de la forme : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$

2.4 déterminer k

- Il faut une information supplémentaire sur f, qui peut être l'image d'une certain valeur : $f(x_0) = y_0$. Ceci donne l'unicité de la solution.