Formulaire de dérivées

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Dérivées et opérations

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
- Si f est dérivable sur I et si λ est un réel, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f'g + fg'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Si f est dérivable sur I, si g est dérivable sur J et si pour tout x de I, $f(x) \in J$, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.
  Cette dernière formule fournit en particulier le tableau suivant :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$f^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$nf'f^{n-1}$	en tout réel où f est dérivable
$1/f$	$-\dfrac{f'}{f^2}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
$\dfrac{1}{f^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{nf'}{f^{n+1}}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
$f^n,\ n \in \mathbb{Z}^*$	$nf'f^{n-1}$	
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
e^f	$f'e^f$	en tout réel où f est dérivable
$\ln(f)$	$\dfrac{f'}{f}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
$\sin(f)$	$f'\cos(f)$	en tout réel où f est dérivable
$\cos(f)$	$-f'\sin(f)$	en tout réel où f est dérivable

Résolutions d'équations

Equations générales

$$\mathbf{A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0}$$

Exemple 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Exemple 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} = e^x \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ou $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Exemple 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(2x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \ldots$
Exemple 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z^2 = 3iz \Leftrightarrow z(z - 3i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 3i$.

$$\mathbf{\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0} \qquad \mathbf{\frac{A}{B} = 1 \Leftrightarrow A = B \text{ et } B \neq 0}$$

Exemple 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^6 - x - 62} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^6 - x - 62} = 0 \Leftrightarrow (x = 1$ ou $x = 2)$ et $x^6 - x - 62 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Exemple 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - 4x + 3$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. $\mathscr{S} = \varnothing$.

$$\mathbf{A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \text{ ou } A = -B} \qquad \textbf{Pour A et B réels, } \mathbf{A^3 = B^3 \Leftrightarrow A = B}$$

Exemple 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2x + 3$ ou $x - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$.
Exemple 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)^3 = (2x+3)^3 \Leftrightarrow x - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -4$.

Pour A et B réels, $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ et $B \geqslant 0$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x+3} = x + 1 \Leftrightarrow x + 3 = (x+1)^2$ et $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ et $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x = 1$ ou $x = -2)$ et $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Equations algébriques

Pour x réel et a réel positif, $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Exemple 1. L'équation $x^2 + 8 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Pour tous réels x et a, $x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x = -2$.

Equations avec exponentielles et logarithmes

Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
Pour tout réel x et tout réel strictement positif a, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$
Si $a \leqslant 0$, l'équation $e^x = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Exemple 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+3} = e^{-x-7} \Leftrightarrow x + 3 = -x - 7 \Leftrightarrow x = -5$.
Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+3} = 2 \Leftrightarrow x + 3 = \ln(2) \Leftrightarrow x = -3 + \ln(2)$.
Exemple 3. Les équations $e^x = -1$ et $e^x = 0$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Pour tous réels A et B, $\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B$ et $A > 0$
Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
Pour tout réel strictement positif x et tout réel a, $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$

Exemple 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x+3) = \ln(-x-7) \Leftrightarrow x + 3 = -x - 7$ et $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x = -5$ et $x + 3 > 0$. $\mathscr{S} = \varnothing$.
Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x+3) = 2 \Leftrightarrow x + 3 = e^2 \Leftrightarrow x = -3 + e^2$.

Equations trigonométriques

$$\cos(\mathbf{a}) = \cos(\mathbf{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{2k}\pi \\ \textbf{ou} \\ \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = -\mathbf{a} + \mathbf{2k}\pi \end{cases}$$

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin(\mathbf{a}) = \sin(\mathbf{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{2k}\pi \\ \textbf{ou} \\ \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = \pi - \mathbf{a} + \mathbf{2k}\pi \end{cases}$$

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - x + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

Formulaire de primitives

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Domaine
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
e^x	$e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

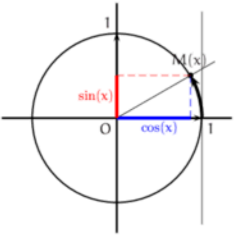
Primitives et opérations

• Si f et g sont continues sur I et si F et G sont des primitives sur I de f et g respectivement, $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
• Si f est continue sur I, si F est une primitive de f sur I et si λ est un réel, λF est une primitive de λf sur I.
• Sinon, on a le tableau suivant dans lequel f désigne systématiquement une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est continue sur I :

Fonction	Primitives	Conditions sur f et I
$f'f^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{f^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$\dfrac{f'}{f^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\dfrac{1}{(n-1)f^{n-1}} + C$, $C \in \mathbb{R}$	f ne s'annule pas sur I
$f'f^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{f^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$	f est strictement positive sur I
$\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$f'e^f$	$e^f + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$f'\cos(f)$	$\sin(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$f'\sin(f)$	$-\cos(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$	

Formulaire de trigonométrie

Définition des fonctions sinus, cosinus et tangente

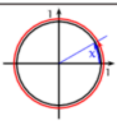
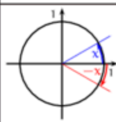
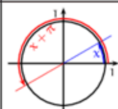
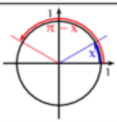
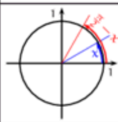
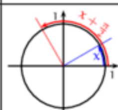


- M est un point du cercle trigonométrique.
  x est une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.

  $\cos(x)$ est l'abscisse de M, $\sin(x)$ est l'ordonnée de M.

- Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Arcs associés

Tour complet	Angle opposé	Demi-tour
 $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$	 $\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$	 $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
Angle supplémentaire	**Angle complémentaire**	**Quart de tour direct**
 $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$	 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire.

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Formules de factorisation

$$1 + \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Résolution d'équations

- $\cos(a) = \cos(b)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = -a + 2k\pi\end{array}\right.$

- $\sin(a) = \sin(b)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = \pi - a + 2k\pi\end{array}\right.$

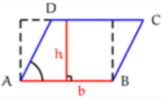
Longueurs,aires et volumes usuels

Carré

Périmètre $= 4a$
Aire $= a^2$
Diagonale $= a\sqrt{2}$

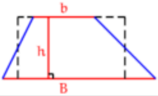
Rectangle

Périmètre $= 2(L + \ell)$
Aire $= L \times \ell$



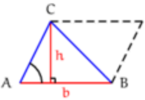
Parallélogramme

$$\text{Aire} = \text{Base} \times \text{Hauteur} = b \times h$$
$$= AB \times AD \times \sin(\widehat{A})$$



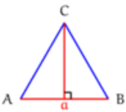
Trapèze

$$\text{Aire} = \frac{(\text{Petite base} + \text{Grande base}) \times \text{Hauteur}}{2}$$
$$= \frac{(B + b) \times h}{2}$$



Triangle

$$\text{Aire} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{b \times h}{2}$$
$$= \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\widehat{A})$$

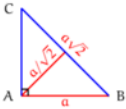


Triangle équilatéral

Périmètre $= 3a$

Hauteur $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Aire $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

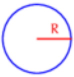


Triangle rectangle isocèle

Hypoténuse $= a\sqrt{2}$

Hauteur $= \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

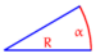
Aire $= \dfrac{a^2}{2}$



Cercle, disque

Périmètre $= 2\pi R$

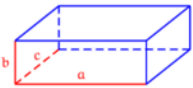
Aire $= \pi R^2$



Secteur angulaire

Longueur $= R\alpha$ (α en radians)

Aire $= \dfrac{\alpha}{2\pi}\pi R^2 = \dfrac{\alpha R^2}{2}$



Parallélépipède rectangle

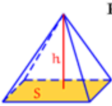
Volume $= abc$

Sphère

Volume $= \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution

Pyramides



Volume $= \dfrac{1}{3}Sh$