

## 1. RAPPELS DE COURS

### 1.1. Equation de Bertrand de Fontviolant pour la résolution de systèmes hyperstatiques appelée aussi Formule de Muller Breslau

On rappelle ici l'expression générale de l'équation de Bertrand de Fontviolant.

$$\sum F_{ext,i} \lambda_i + \sum C_{ext,j} \varphi_j = \int_0^{Struct.} \frac{Mm}{EI} ds + \int_0^{Struct.} \frac{Nn}{EA} + \int_0^{Struct.} \frac{Vv}{G\Omega}$$

dans laquelle :

M,N,V désignent les efforts internes dans la structure étudiée avec le chargement réel.

$m$ ,  $n$  et  $v$  désignent les efforts internes dans la structure étudiée soumise au seul chargement

auxiliaire  $\sum F_{ext,i}$  et  $\sum C_{ext,j}$ .

$\lambda_i$  et  $\varphi_j$  désignent les déformations subies par le système hyperstatique sous l'action des forces réelles.

L'équation appliquée aux liaisons surabondantes permet de déterminer les forces et couples de liaisons surabondantes définies comme inconnues hyperstatiques.

Nota 1 : Pour les poutres, la déformation de moment fléchissant est prépondérante par rapport aux déformations d'effort normal et d'effort tranchant.

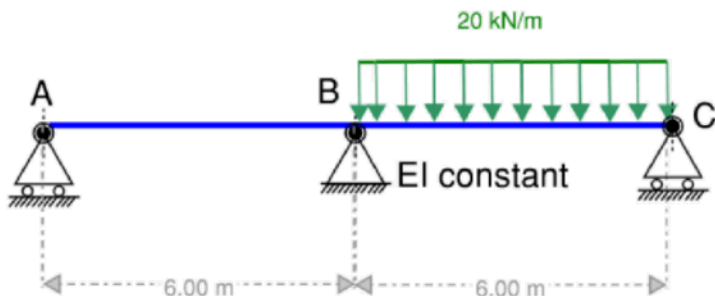
On obtient finalement en considérant l'application d'une action unitaire en substitution d'une inconnue hyperstatique :

$$\lambda_i = \int_0^{Struct.} \frac{Mm}{EI} ds$$

(pour les ossatures à barres). Cette formulation découlant directement de l'équation de BDF est également appelé 2<sup>ème</sup> équation de Castigliano.

## 2. EXERCICE D'INTRODUCTION

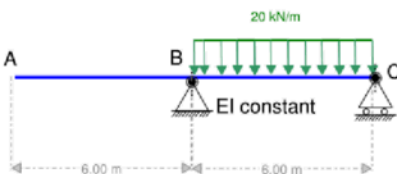
On considère ici le système hyperstatique 1 fois.



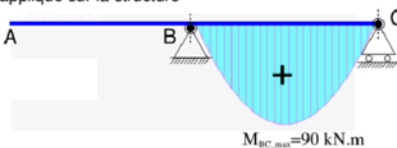
2.1

La structure est hyperstatique d'ordre 1.

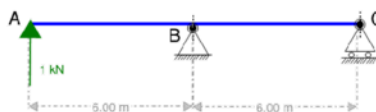
2.2



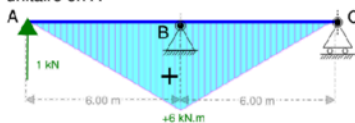
Structure rendue isostatique avec le chargement appliqué sur la structure



Courbe de  $M^0(x)$

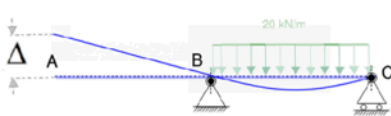


Structure rendue isostatique avec une charge unitaire en A

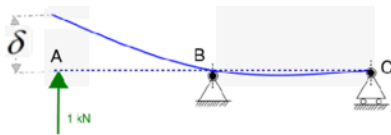


Courbe de  $m_1(x)$

On note respectivement le déplacement vertical en A sous l'action des surcharges de 20 kN/m



Déformation de la poutre rendue isostatique sous chargement 20kN/m sur la travée BC



Déformation de la poutre rendue isostatique sous chargement unitaire en A

On peut calculer les expressions des 2 déplacements verticaux en A

$$\Delta = \int_{Structure} \frac{M^0 * m_1}{EI} \text{ et } \delta = \int_{Structure} \frac{m_1^2}{EI} \text{ analytiquement ou par les intégrales de Mohr}$$

$$\Delta = \int_0^6 \frac{1}{EI} x \left( \begin{array}{c} \text{Diagramme de } M^0 \text{ sur } AB: \text{parabole} \\ \text{Diagramme de } m_1 \text{ sur } AB: \text{triangle} \end{array} \right) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{3EI} * 90 * 6 * 6$$

$$\Delta = \frac{1080}{EI}$$

$$\delta = \int_0^6 \frac{1}{EI} x \left( \begin{array}{c} \text{Diagramme de } m_1 \text{ sur } BC: \text{triangle} \\ \text{Diagramme de } m_1 \text{ sur } BC: \text{triangle} \end{array} \right) dx$$

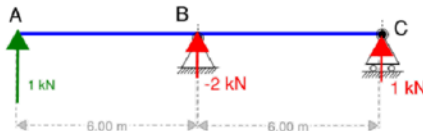
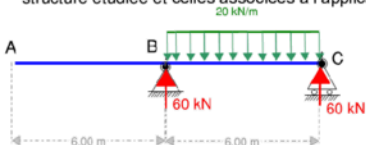
$$\delta = \frac{2}{EI} * \left( \frac{1}{3} * 6 * 6 \right) * 6$$

$$\delta = \frac{144}{EI}$$

La réaction verticale en A est telle que  $R_A * \delta + \Delta = 0$  avec  $\Delta$  et  $\delta$  pris positivement vers le haut.

$$\text{Soit } R_A = -\frac{1080}{144} = -7.5 \text{ kN}$$

Les efforts internes et les réactions d'appui peuvent être obtenues par sommation algébrique. A ce titre, on donne plus bas les réactions pour les 2 cas de charge (application des charges sur la structure étudiée et celles associées à l'application d'une charge unitaire en A).



Les réactions s'obtiennent par sommation algébrique :

$$R_B = 60 - 2 * (-7.5) = 75 \text{ kN} \text{ et } R_C = 60 + 1 * (-7.5) = 52.5 \text{ kN}$$

$$\text{De même } M(x) = M^0 + R_A * m_1$$

Le moment maximum sur la travée BC vaut :

$$M_{BC}(x) = \left(\frac{20 \cdot 6}{2}\right) \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} + M_{BA} \cdot \left(1 - \frac{x}{L_{BC}}\right)$$

$$\frac{dM_{BC}}{dx} = 0 \text{ s'écrit } \frac{dM_{BC}}{dx} = \left(\frac{20 \cdot 6}{2}\right) - 20x - \frac{(M_{BA})}{L_{BC}} = 0$$

Avec  $M_{BA} = 6 \cdot (-7.5) = -45 \text{ kN.m}$

Soit  $\frac{dM_{BC}}{dx} = 0$  pour  $x = 3.375 \text{ m}$ .

Puis  $M_{BC}(x = 3.375) = 68.9 \text{ kN.m}$

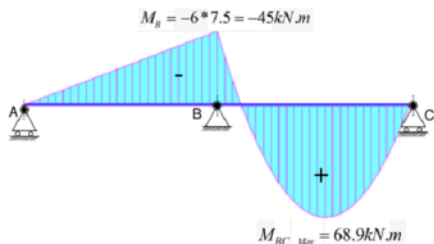


Figure ci-contre : Moment fléchissant

On peut également obtenir l'effort tranchant sur la base des réactions d'appuis et du fait qu'on a un diagramme de fonction affine entre B et C ( $V = \frac{dM}{dx}$ ).

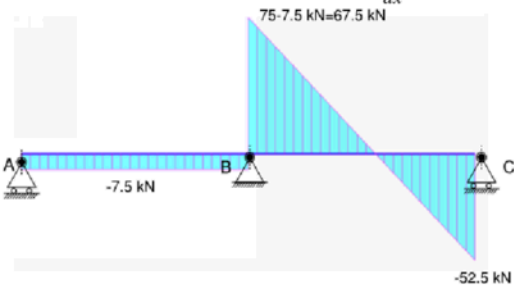


Figure ci-dessus : Effort tranchant

Intégrales de MOHR

Intégrales de Mohr (valeurs de  $\frac{1}{L} \int_0^L M' M'' dx$ )

	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{M_1}{6} (2M_1 + M_2)$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_1}{6} (M_1 + 2M_2)$	$\frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} M_1 M_4$
	$\frac{M_1}{6} (2M_3 + M_4)$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 + \frac{1}{3} M_2 M_4$ $\frac{1}{6} M_1 M_4 + \frac{1}{6} M_2 M_3$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$ $+ \frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_1}{3} (M_3 + M_4)$
	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3$	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3 +$ $\frac{1+b}{6} M_2 M_3$	$\left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{(b-a)^2}{6K} \right] M_1 M_3$ $a < b \rightarrow K = b(1-a)$ $a > b \rightarrow K = a(1-b)$	$\frac{1+b-b^2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\left[ (3-b) M_1 + b M_2 \right]$ $\frac{b}{6} M_3$	$\frac{2b-a + \frac{(b-a)^2(1-b)}{K}}{6} M_1 M_3$ pour K, voir ci-dessus	$\frac{b^2(2-b)}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1+a-a^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{8}{15} M_1 M_3$
	$\frac{1}{4} M_1 M_3$	$\frac{1}{12} (3M_1 + M_2) M_3$	$\frac{3-3a+a^2}{12} M_1 M_3$	$\frac{1}{5} M_1 M_3$
	$\frac{1}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) M_4$	$\frac{1+a+a^2}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{5} M_1 M_4$

## 1. RAPPELS DE COURS

### 1.1. Equation de Bertrand de Fontviolant pour la résolution de systèmes hyperstatiques appelée aussi Formule de Muller Breslau

On rappelle ici l'expression générale de l'équation de Bertrand de Fontviolant.

$$\sum F_{ext,i} \lambda_i + \sum C_{ext,j} \varphi_j = \int_0^{Struct.} \frac{Mm}{EI} ds + \int_0^{Struct.} \frac{Nn}{EA} + \int_0^{Struct.} \frac{Vv}{G\Omega}$$

dans laquelle :

$M, N, V$  désignent les efforts internes dans la structure étudiée avec le chargement réel.

$m, n$  et  $v$  désignent les efforts internes dans la structure étudiée soumise au seul chargement

auxiliaire  $\sum F_{ext,i}$  et  $\sum C_{ext,j}$ .

$\lambda_i$  et  $\varphi_j$  désignent les déformations subies par le système hyperstatique sous l'action des forces réelles.

L'équation appliquée aux liaisons surabondantes permet de déterminer les forces et couples de liaisons surabondantes définies comme inconnues hyperstatiques.

Nota 1 : Pour les poutres, la déformation de moment fléchissant est prépondérante par rapport aux déformations d'effort normal et d'effort tranchant.

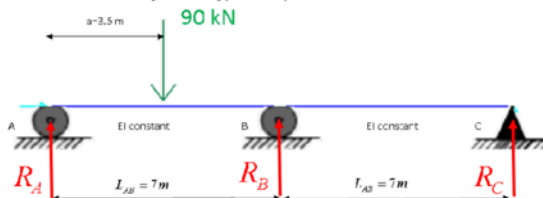
On obtient finalement en considérant l'application d'une action unitaire en substitution d'une inconnue hyperstatique :

$$\lambda_i = \int_0^{Struct.} \frac{Mm}{EI} ds$$

(pour les ossatures à barres). Cette formulation découlant directement de l'équation de BDF est également appelé 2<sup>ème</sup> équation de Castigliano.

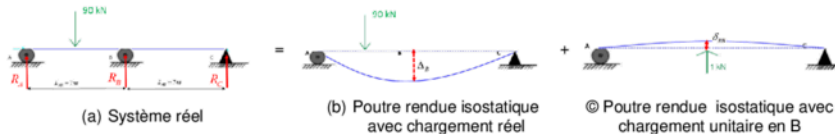
## 2. EXERCICE D'INTRODUCTION

On considère ici le système hyperstatique 1 fois.



## 2.1. Méthode Analytique avec choix de l'inconnue hyperstatique : Réaction verticale en B

La démarche d'étude consiste à libérer une inconnue hyperstatique (ici la réaction en B) et à appliquer le chargement fictif qui assure la compatibilité cinématique des déformations



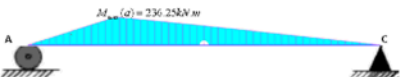
On appelle  $\Delta_B$  la déformée en B dans le système mécanique rendu isostatique sous l'effet de la charge de 90 kN appliquée à l'abscisse 3.5 m.

On appelle  $\delta_{BB}$  la déformée en B dans le système mécanique rendu isostatique sous l'effet de la charge de 1 kN appliquée en B.

Les déformées  $\Delta_B$  et  $\delta_{BB}$  peuvent être obtenues de manière simple par l'équation de BDF.

Pour ce faire, nous allons commencer par tracer les efforts internes M et m dans la structure isostatique soumise au chargement réel d'une part et d'autre part soumise au chargement fictif unitaire :

Effort interne M pour la poutre isostatique (configuration b)



Pour  $0 < x < a$

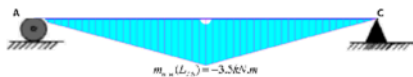
$$M(x) = \frac{P(L_{AB} + L_{BC} - a)x}{(L_{AB} + L_{BC})}$$

Pour  $x > a$

$$M(x) = Pa \left( 1 - \frac{x}{(L_{AB} + L_{BC})} \right)$$

$$M_{\max}(a) = \frac{90 \text{ kN}(10.5 \text{ m})(3.5 \text{ m})}{(14 \text{ m})} = 236.25 \text{ kN.m}$$

Effort interne m pour la poutre isostatique (configuration c)



Pour  $0 < x < L_{AB}$

$$m(x) = \frac{-1 \text{ kN}(L_{AB})x}{(L_{AB} + L_{BC})}$$

Pour  $x > L_{AB}$

$$m(x) = -(1 \text{ kN}) * L_{AB} * \left( 1 - \frac{x}{L_{AB} + L_{BC}} \right)$$

$$m_{\max}(L_{AB}) = -3.5 \text{ kN.m}$$

**Nota important :** Nous avons fourni plus haut l'ensemble des équations analytiques des différents moments fléchissants pour chacun des tronçons. Il est totalement acceptable voire recommandé dans un exercice comme celui-ci de se contenter de fournir sur une copie d'examen les seules allures de M / m et les valeurs extremum. En effet, ce sont les seules données nécessaires pour effectuer les intégrales de Mohr et c'est bien là l'objectif.

Déformation  $\Delta_B$  par les intégrales de Mohr

$$\Delta_B = \int_0^{14} \frac{1}{EI} x \times \left[ \begin{array}{c} \text{Diagramme } M_1 \\ \text{M1=236.2 kN.m} \\ \text{a=3.5/14=0.25} \\ \text{L=14 m} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{Diagramme } M_3 \\ \text{M3=3.5 kN.m} \\ \text{b=7/14=0.5} \\ \text{L=14 m} \end{array} \right] = \frac{14}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{(b-a)^2}{6K} \right] M_1 M_3$$

$a < b \rightarrow K = b(1-a)$

$a > b \rightarrow K = a(1-b)$

$K=b*(1-a)=0.375$

$a=0.25 ; b=0.5$

$M1=236.2 \text{ kN.m}$

$M3=3.5 \text{ kN.m}$

$$\Delta_B = \frac{14}{EI} \left( \frac{1}{3} - \frac{(0.5-0.25)^2}{6*0.375} \right) * 236.2 * 3.5 = \frac{1}{EI} * 3536.5$$

Déformation  $\delta_{BB}$  par les intégrales de Mohr

$$\delta_{BB} = \int_0^{14} \frac{1}{EI} x \times \left[ \begin{array}{c} \text{Diagramme } M_1 \\ \text{M1=-3.5 kN.m} \\ \text{a=7/14=0.5} \\ \text{L=14 m} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{Diagramme } M_3 \\ \text{M3=3.5 kN.m} \\ \text{b=7/14=0.5} \\ \text{L=14 m} \end{array} \right] = \frac{14}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{(b-a)^2}{6K} \right] M_1 M_3$$

$a < b \rightarrow K = b(1-a)$

$a > b \rightarrow K = a(1-b)$

$K=b*(1-a)=0.25$

$a=0.25 ; b=0.5$

$M1=-3.5 \text{ kN.m}$

$M3=3.5 \text{ kN.m}$

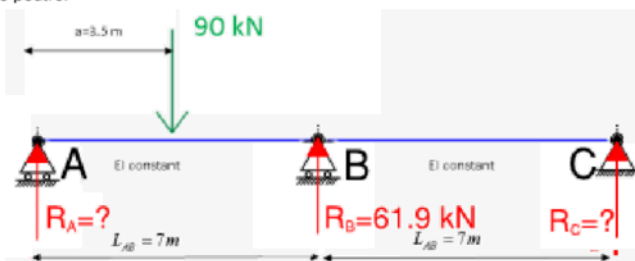
$$\delta_{BB} = \frac{14}{EI} \left( \frac{1}{3} - \frac{(0.5-0.5)^2}{6*1.5} \right) * (-3.5) * 3.5 = -\frac{1}{EI} * 57.17$$

La réaction hyperstatique peut être obtenue en écrivant l'équation :

$$\Delta_B + X * \delta_{BB} = 0 \Rightarrow X = \frac{-\Delta_B}{\delta_{BB}} = \frac{3536.5}{57.17} = 61.87 \text{ soit } R_B = 61.87 \text{ kN}$$



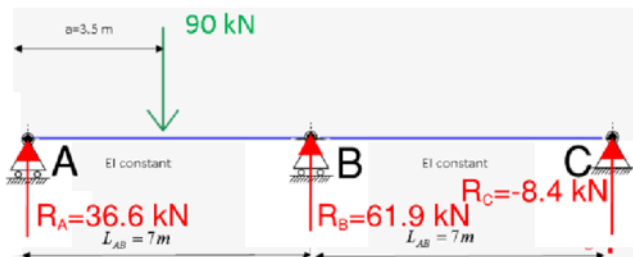
On peut donc déduire les réactions d'appuis  $R_A$  et  $R_C$  ainsi que les efforts internes pour chacun des tronçons de poutre.



Application du PFS sur le système hyperstatique dont la réaction  $R_B$  est connue.

$$\sum F_z = 0 \text{ et } \sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_C = \frac{-7 \cdot 61.87 + 90 \cdot 3.5}{14} = -8.435\text{ kN} ;$$

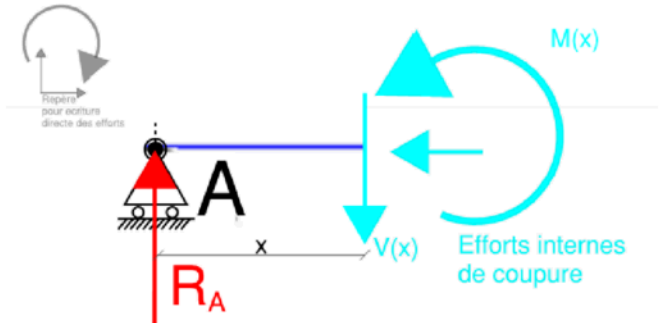
$$R_A = 90 - 61.871 + 8.435 = 36.56\text{ kN}$$



Nota : On a bien  $R_C < 0$  ce qui correspond à une réaction vis-à-vis du soulèvement de l'appui en C.

Les équations des efforts internes dans chaque tronçon de poutre s'écrit :  
 Moment Fléchissant  $M(x)$                       Effort tranchant  $V(x)$

$0 < x < 3.5m$

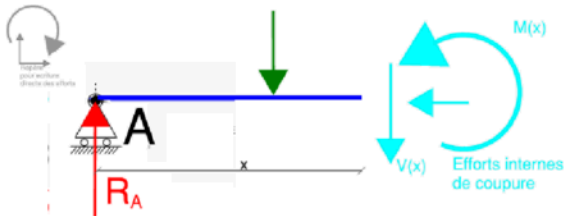


$$M(x) = R_A * x$$

$$V(x) = R_A$$

$$M(x = 3.5m) = 127.96kN.m$$

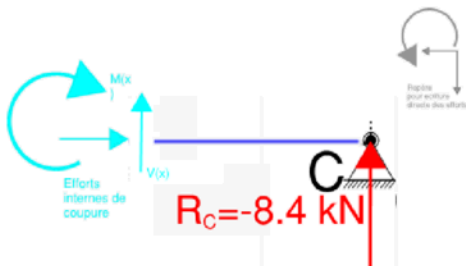
$3.5m < x < 7m$



$$M(x) = R_A * x - 90 * (x - 3.5)$$

$$V(x) = R_A - 90$$

$$M(x = 7m) = -59.08kN.m$$

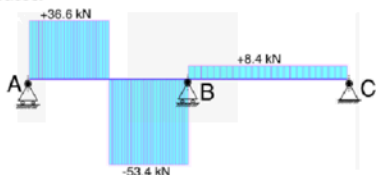
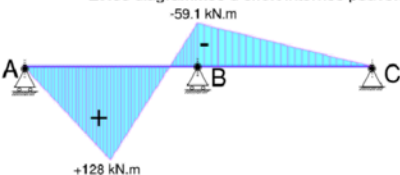
$7m < x < 14m$ 


$$M(x) = R_C * (14 - x_2)$$

$$V(x) = -R_C$$

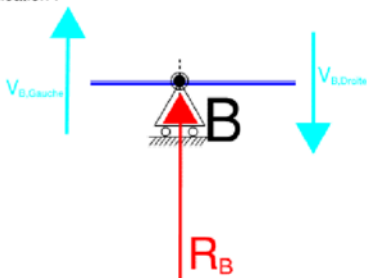
Avec  $x_2$  abscisse en prenant pour origine le point B début de la 2<sup>ème</sup> travée.

Et les diagrammes d'effort internes peuvent être tracés.



Moment fléchissant dans la poutre continue

Vérification :



La réaction d'appui en B vaut bien :

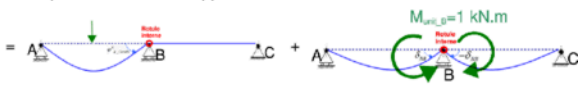
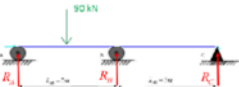
$$R_B = V_{B,Droite} - V_{B,Gauche} = 61.8 \text{ kN}$$

## 2.2. Autre choix d'inconnu hyperstatique : Le moment fléchissant sur l'appui B (+Résolution avec les intégrales de Mohr)

On privilégiera cette méthode pour les résolutions manuelles sans outil informatique puisque les tronçons de moments non nuls à intégrer sont limités (par un choix judicieux d'inconnu hyperstatique).

L'usage des intégrales de Mohr permet également une estimation rapide des tronçons d'intégrales non nulles.

On choisit ici l'inconnu hyperstatique le moment sur l'appui B.



- Système réel

- Poutre rendue isostatique avec chargement réel.

Ici la poutre a été rendue isostatique avec une rotule interne en B

- (c) Poutre rendue isostatique avec chargement unitaire de type moment en B

On note  $\delta_{BB}$  la rotation à gauche de l'appui B.

Il y a lieu de constater que  $\delta_{BB} > 0$  (rotation dans le sens trigonométrique) et que la rotation à droite de l'appui B est égal en amplitude (puisque les travées AB et BC ont la même souplesse élastique). La rotation à droite de l'appui B vaut donc ici  $-\delta_{BB}$

On note dès à présent  $\varphi^0_{B\_Gauche}$  la rotation à gauche de l'appui B dans le système rendu isostatique

La déformée de rotation à gauche de l'appui B  $\varphi^0_{B\_Gauche}$  dans le système isostatique (b) peut être déterminée par application de l'équation de BDF.

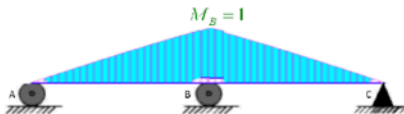
Il en est de même pour la déformée de rotation  $\delta_{BB}$  en B pour l'application d'une charge unitaire de type moment fléchissant  $M_B=1$  (système isostatique).

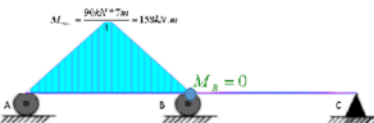
La compatibilité des déformations de rotation de part et d'autre de l'appui B conduit à écrire :  $\varphi^0_{B\_Gauche} + 2 * X_1 \delta_{BB} = 0$  où  $X_1$  désigne la valeur du moment de continuité dans la poutre réelle et  $f_{BB}$  désigne la souplesse en rotation au niveau de l'appui intermédiaire B.

Le terme  $2 * \delta_{BB}$  provient de la différence algébrique des 2 rotations de part et d'autre de l'appui B.

Effort interne M pour la poutre isostatique  
(configuration b)

Effort interne m pour la poutre isostatique  
(configuration c)



Moment  $M(x)$  dans le système cMoment  $M(x)$  dans le système bLes déformées  $\varphi_{B-W}$  et  $f_{BB-W}$ ,  $f_{BB-E}$  peuvent être déterminées par l'équation de BDF simplifiée :

$$\varphi_{B-W} = \int_0^{L_{AB}+L_{BC}} \frac{M(x) * m(x)}{EI} dx \quad \varphi_{B-W-M_{unitaire}} = \int_0^{L_{AB}} \frac{(m(x))^2}{EI} dx ;$$

$$\varphi_{B-E-M_{unitaire}} = - \int_0^{L_{BC}} \frac{(m(x'))^2}{EI} dx' \quad (x' \text{ Origine en B})$$

$$\varphi_{B-W} = \int_0^{3.5} \frac{158}{0} \times \frac{0}{158} dx + \int_{3.5}^7 \frac{158}{3.5} \times \frac{0}{1} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} * 157.5 * 0.5 + 157.5/6 * (2 * 0.5 + 1) \right) = \frac{1}{EI} * 275.6$$

$$f_{BB-W} = \int_0^7 \frac{0}{1} \times \frac{0}{1} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \right) * 7 = \frac{1}{EI} (2.3333)$$

$$\varphi_{B-W} + X_1 * (\varphi_{B-W-M_{unitaire}} - \varphi_{B-E-M_{unitaire}}) = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-\varphi_{B-W}}{(\varphi_{B-W-M_{unitaire}} - \varphi_{B-E-M_{unitaire}})} = \frac{-275.6}{2.33 * 2} = -59.06$$

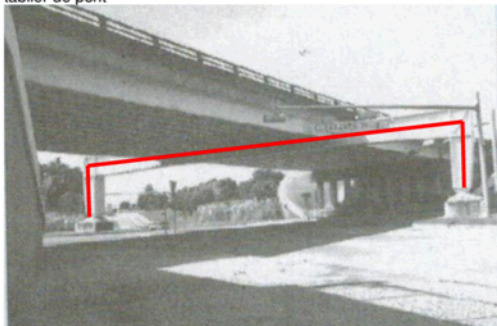
## Intégrales de MOHR

Intégrales de Mohr (valeurs de  $\frac{1}{L} \int_0^L M' M'' dx$ )

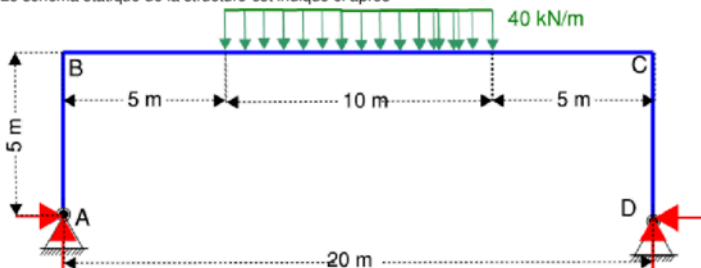
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{M_1}{6} (2M_1 + M_2)$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_1}{6} (M_1 + 2M_2)$	$\frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} M_1 M_4$
	$\frac{M_1}{6} (2M_3 + M_4)$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 + \frac{1}{3} M_2 M_4$ $\frac{1}{6} M_1 M_4 + \frac{1}{6} M_2 M_3$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$ $+ \frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_1}{3} (M_3 + M_4)$
	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3$	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3 +$ $\frac{1+b}{6} M_2 M_3$	$\left[ \frac{1}{3} \frac{(b-a)^2}{6K} \right] M_1 M_3$ $a < b \rightarrow K = b(1-a)$ $a > b \rightarrow K = a(1-b)$	$\frac{1+b-b^2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\left[ (3-b) M_1 + b M_2 \right]$ $\frac{b}{6} M_3$	$\frac{2b-a + \frac{(b-a)^2(1-b)}{K}}{6} M_1 M_3$ pour K, voir ci-dessus	$\frac{b^2(2-b)}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1+a-a^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{8}{15} M_1 M_3$
	$\frac{1}{4} M_1 M_3$	$\frac{1}{12} (3M_1 + M_2) M_3$	$\frac{3-3a+a^2}{12} M_1 M_3$	$\frac{1}{5} M_1 M_3$
	$\frac{1}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) M_4$	$\frac{1+a+a^2}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{5} M_1 M_4$

## 0. EXERCICE PORTIQUE BI-ARTICULÉ EN PIED

On considère ci-après le cas d'un portique métallique reprenant les surcharges apportées par un tablier de pont



Le schéma statique de la structure est indiqué ci après



- 0.1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure
- 0.2. Déterminer l'inconnu hyperstatique – ( on choisira la poussée en A)
- 0.3. Tracer les diagrammes M,N,V pour la structure de portique