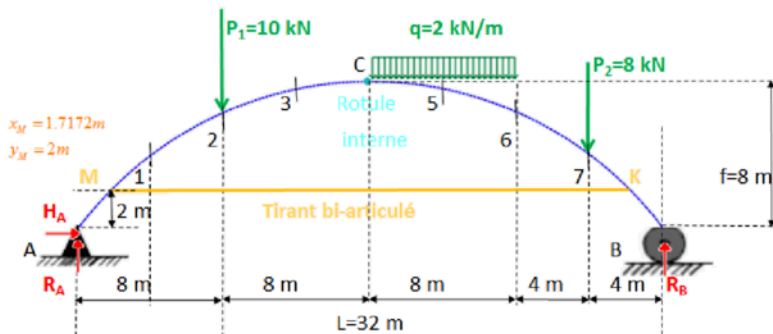


Vérification de cohérence des résultats du comportement structural: La structure est majoritairement en compression. Le moment fléchissant est de faible amplitude.

2. EXERCICE A TRAITER PAR LES EI

On reprend la structure précédente et on introduit un tirant reliant les points M et K. Simultanément, l'appui en B devient un appui glissant.



2.1. Déterminer les réactions d'appui de la structure

2.2. Déterminer les efforts internes M , N et V dans les sections de référence prédéfinies ainsi que dans des sections en M et K puis tracer les diagrammes des efforts internes dans la structure

Solution :

La démarche de résolution est simple puisqu'il s'agit ici d'une structure isostatique, c'est-à-dire que nous saurons déterminer plus bas les réactions d'appui ainsi que l'effort interne dans le tirant par une coupure réalisée à mi-portée.

Nous commençons plus bas par déterminer les réactions d'appui :

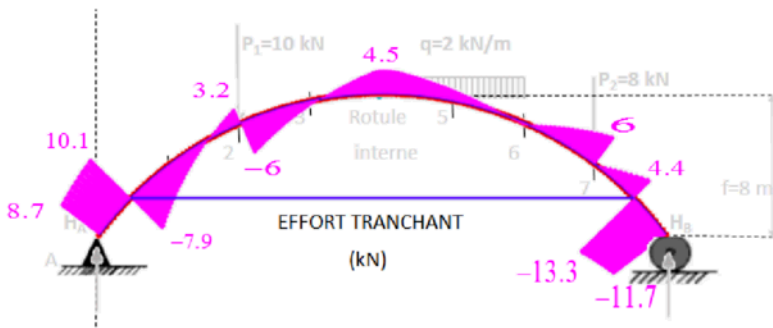
$$(2.1) \quad R_A = R_A^0 = 14.5 \text{ kN} \quad \text{et} \quad R_B = R_B^0 = 19.5 \text{ kN}$$

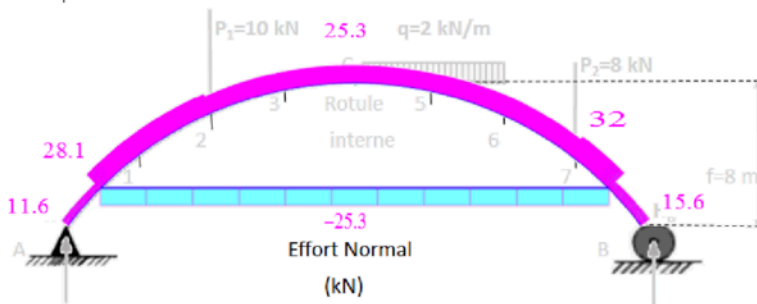
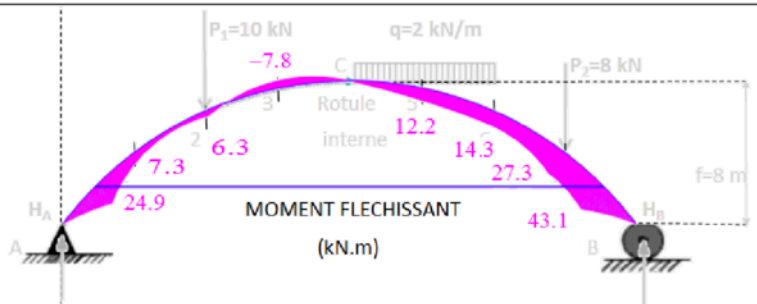
Puis, on peut d'ores et déjà déterminer l'effort interne N_{MK} dans le tirant en effectuant une coupure à mi-portée (équation de moment nul à mi-portée qu'il faut forcément exploiter pour tenir compte de la présence de la rotule interne) :

$$\sum M_{\text{coupe}} = 0 \Rightarrow 10 \cdot 8 - N_{MK} \cdot (8-2) - R_A \cdot 16 = 0 \quad \text{soit} \quad N_{MK} = (-14.5 \cdot 16 + 10 \cdot 8) / 6 = -25.3 \text{ kN (Traction)}$$

(2.2)

S	x (m)	y (m)	$\sin \phi$	$\cos \phi$	M_x^0 (kN·m)	$N_{MK} \cdot y$ (kN·m)	M (kN·m)	V^0 (kN)	V (kN)	N (kN)
A	0	0.0	0.8	0.60	0	0.0	0.0	14.5	8.7	11.6
M	1.71	2.0	0.71	0.70	24.9	0.0	24.9	14.5	10.1(G)& -7.9(D)	10.4(G)&28.1(D)
1	4	4.0	0.6	0.80	58	50.7	7.3	14.5	-3.6	29
2	8	6.3	0.4	0.92	116	109.7	6.3	14.5(G) &4.5(D)	3.2(G)& -6(D)	29(G)&25(D)
3	12	7.6	0.2	0.98	134	141.8	-7.8	4.5	-0.7	25.7
C/ 4	16	8.0	0	1.00	152	152.0	0.0	4.5	4.5	25.3
5	20	7.6	-0.2	0.98	154	141.8	12.2	-3.5	1.60	25.5
6	24	6.3	-0.4	0.92	124	109.7	14.3	-11.5	-0.4	27.8
7	28	4.0	-0.6	0.80	78	50.7	27.3	-11.5(G)& 19.5(D)	6(G)& -0.4(D)	27.2(G)&32 (D)
K	30.2	2.0	-	0.71415	43.1	0.0	43.1	-19.5	4.4(G)& -13.3(D)	31.7(G)&13. 9(D)
B	32	0.0	-0.8	0.60	0	0.0	0.0	-19.5	-11.7	15.6(D)





1. EXERCICE (DETERMINATION DES EFFORTS SISMIQUES DANS UNE STRUCTURE)

On s'intéresse à la structure suivante constituée de 2 planchers R+1 et R+2 avec une dalle en toiture.

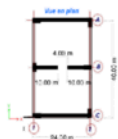
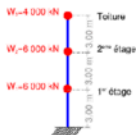


Figure 1: Schéma mécanique comportant les poids des différents étages concentrés à chaque étage

La Figure 1 représente le schéma mécanique pour l'analyse dynamique avec :

- Concentration d'une raideur équivalente pour chaque élément vertical reliant 3 niveaux successifs,
- Masses concentrées à chaque étage comportant la masse du plancher et la masse associées aux porteurs verticaux sur une $\frac{1}{2}$ hauteur en dessous et au dessus de chaque étage.

Nota : Dans cet énoncé, on fournit les poids du bâtiment concentrés à chaque étage.

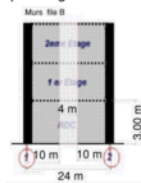
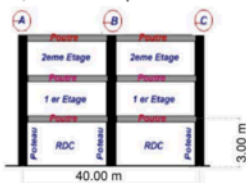
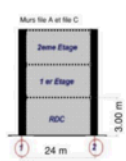


Figure 3: Élévation des murs pour chacune des files A et C

Figure 4: Élévation des portiques pour chacune des files 1 et 2

Figure 5: Élévation des murs pour la file B

Le poids total utilisé pour l'analyse sismique est $W=W_1+W_2+W_3=16\,000\text{ kN}$ (voir Figure 1)

On fournit le spectre sismique horizontal élastique suivant :

Bâtiment en zone 4, de catégorie d'importance II et de classe de sol D. L'amortissement considéré est 5% ($\eta=1$).

Zone 4 $\rightarrow a_{gr} = 1.6\text{ m/s}^2$

Catégorie II $\rightarrow \gamma_I = 1$ donc $a_0 = a_{gr} = 1.6\text{ m/s}^2$

Classe de sol D $\rightarrow S = 1.6 / T_B = 0.1\text{ s} / T_C = 0.6\text{ s} / T_D = 1.5\text{ s}$

On en déduit l'accélération à la période nulle $S_e(T=0) = a_0 \times S = 1.6 \times 1.6 = 2.56\text{ m/s}^2$.

Ainsi que l'accélération au pic du spectre $S_e(\text{pic}) = 2.5 \times a_0 \times S \times 1 = 2.5 \times 2.56 = 6.4\text{ m/s}^2$.

Le spectre sismique horizontal élastique est tracé plus bas :

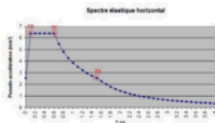


Figure 6: Spectre sismique horizontal élastique $S_e(T)$

Par la suite, on prendra le spectre de dimensionnement $S_d(T)$ pour chacune des directions sismiques

- Sens x et sens y $S_d(T) = \frac{S_g(T)}{q}$

Avec $S_g(T)$ le spectre sismique élastique représenté par la Figure 6 et q coefficient de comportement défini pour chacune des directions :

- Coefficient de comportement sens x : $q_x = 2$ (contreventement avec des murs)
- Coefficient de comportement sens y : $q_y = 3$ (contreventement avec des portiques)

Les périodes du bâtiment pour chacune des directions sont données :

- Période sens x : $T_x = 0.2$ s (contreventement avec des murs)
- Période sens y : $T_y = 0.3$ s (contreventement avec des portiques)

- Sur la base des coefficients de comportement fournis pour chacune des directions, des périodes et des poids fournis pour chacun des étages, déterminer l'effort tranchant total pour chacune des directions x et y en pied du bâtiment.

Nota : On prendra $\lambda = 1$ (bâtiment à 2 étages) dans l'application de la formule de l'effort tranchant fourni en annexe 1

- Déterminer la répartition des forces horizontales à chaque étage pour chacune des directions x et y
- En déduire le moment de renversement pour chacune des directions x et y en pied du bâtiment.
- En faisant l'hypothèse que les murs sur les files A et C sont continus sans ouvertures et que le mur file B comporte une ouverture à chaque étage de longueur 4 m (voir Figure 3 et Figure 5), déterminer l'effort tranchant dans chacun des 2 murs de longueur 10 m situés sur la file B.
- On modifie la raideur des éléments de structures et les périodes sont modifiées ainsi :
 - Sens x : $T_x = 0.1$ s (on obtient cette performance en ajoutant des murs)
 - Sens y : $T_y = 0.8$ s (on obtient cette performance en assouplissant les portiques)

Que deviennent les efforts tranchants pour chacune des directions x et y en pied du bâtiment ?

Annexe 1 : Formulaire – Extrait Eurocode 8

4.3.2.2 Effort tranchant à la base de la structure

(1)st L'effort tranchant élastique à la base, F_b , doit être déterminé, pour chaque direction principale dans laquelle le bâtiment est analysé, au moyen de l'expression suivante :

$$F_b = S_d(T_b) m \quad (4.8)$$

- où :
- $S_d(T_b)$ est l'ordonnée du spectre de calcul (voir 3.2.2.5) pour la période T_b ;
 - T_b est la période fondamentale du bâtiment pour le mouvement de translation dans la direction considérée;
 - m est le ratio total des déformées, au-dessus des fondations ou du niveau d'un ancrage convenablement réglé, calculé conformément à 3.2.4(2);
 - λ est le coefficient de correction, dont la valeur est égale à 1 si $\lambda < 0.55$ et $F_b \leq 2T_b$ et si le bâtiment a plus de deux étages, autrement $\lambda = 1.5$.

NOTE Le coefficient λ doit être tel que dans les éléments d'un même étage avec des degrés de liberté de translation dans chaque direction horizontale, le ratio moyen effectif du premier mode (fondamental) est supérieur ou égal à 90 %, à la masse totale du bâtiment.

4.3.2.3 Distribution des forces sismiques horizontales

(2) Lorsque le mode fondamental est considéré de manière approximative en supposant que les déplacements horizontaux croissent linéairement suivant la hauteur, les forces horizontales F_i doivent être calculées par l'expression :

$$F_i = F_b \frac{h_i}{\sum_{j=1}^n h_j} \quad (4.11)$$

où h_i est la hauteur des masses m_i ou, au-dessus du niveau d'application de l'action sismique (fondations ou sommets d'un ancrage convenablement réglé).

F_b est la force horizontale agissant au niveau 1;

F_i est l'effort tranchant à la base obtenu par la relation (4.8);

1. (DETERMINATION DES EFFORTS SISMQUES DANS UNE STRUCTURE)

1) Effort tranchant en pied du bâtiment

Les efforts tranchants en pied du bâtiment sont à déterminer pour chacune des directions x et y par application de la formule du § 4.3.3.2.2 de l'Eurocode 8 partie 1 également repris en annexe 1 de cet exercice.

L'effort tranchant sismique à la base F_b peut être déterminé pour chacune des directions par l'expression du §4.3.3.2.2

$$F_b = S_d(T_1) * m * \lambda$$

Avec

$S_d(T_1)$: Ordonnée du spectre de calcul pour la période T_1 .

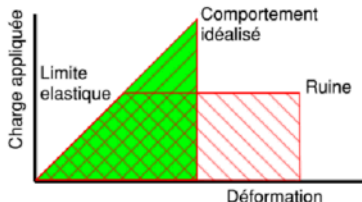
m : Masse totale du bâtiment au-dessus du bâtiment ou du sommet d'un soubassement rigide

λ : Coefficient de correction dont la valeur est égale à $\lambda = 0.85$ si $T_1 \leq T_C$ et si le bâtiment a plus de 2 étages, autrement $\lambda = 1$.

On note par ailleurs dès à présent que le spectre de calcul est relié au spectre élastique fourni par la relation

$$S_d(T_1) = \frac{S_e(T_1)}{q} \text{ avec } S_e(T_1) \text{ ordonnée spectrale élastique de l'accélération pour la période } T_1 \text{ et } q : \text{coefficient de comportement.}$$

Plus bas, nous rappelons une explication et interprétation du coefficient de comportement :



Le concept derrière le coefficient de comportement est d'estimer les forces sismiques avec des modèles linéaires élastiques (sans recourir à des analyses non linéaires).

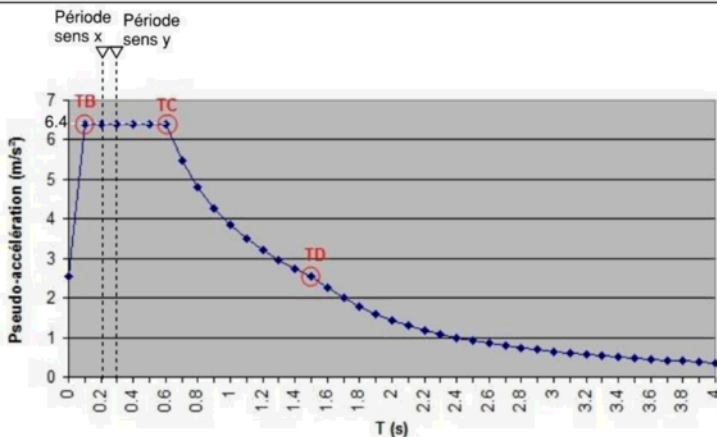
Plus précisément, dans cette approche, les forces déterminées par le comportement idéalisé linéaire élastique sont divisées par un coefficient q pour tenir des incursions post-élastiques (fissuration, déformations plastiques....) et de la ductilité des éléments de structure.

Le coefficient de comportement dépend de la capacité d'une structure à dissiper de l'énergie.

Le coefficient de comportement dépend donc du système constructif et il est fourni dans l'énoncé pour chacune des directions sismiques.

Ici l'énoncé indique $q_r=2$ (contreventement avec des murs) et $q_r=3$ (contreventement avec des portiques)

Dans chacune des directions, les périodes propres du bâtiment sont comprises entre les valeurs de T_B et T_C , ce qui correspond à la plage de résonance (la réponse de la structure en guise d'accélération est maximale)



Direction x

L'effort tranchant Fb_x en pied du bâtiment vaut :

$$Fb_x = Sd(T_x) \cdot m \cdot \lambda \text{ avec } Sd(T_x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{6.4 \frac{m}{s^2}}{q_x}; m = \frac{(W_1 + W_2 + W_3)}{9.81 \frac{m}{s^2}} \text{ et } \lambda = 1; q_x = 2$$

$$\Rightarrow Fb_x = 5219 \text{ kN}$$

$$\text{Vérification des ordres de grandeur: } \frac{Fb_x}{(W_1 + W_2 + W_3)} = 0.326$$

Il est classique que le calcul sismique conduise à un effort tranchant entre 10% et 40% du poids.

Cette fourchette est large (fonction bien sûr de la zone sismique, du coefficient de comportement et de paramètres de calcul). Cet ordre de grandeur est avant tout là pour se prémunir d'une erreur de type facteur 10! qui arrive si on mélange les unités et notamment si on mélange le poids et la masse.

Direction y

L'effort tranchant Fb_y en pied du bâtiment vaut :

$$Fb_y = Sd(T_y) \cdot m \cdot \lambda \text{ avec } Sd(T_y) = \frac{6.4 \frac{m}{s^2}}{q_y};$$

$$\Rightarrow Fb_y = 3479.5 \text{ kN}$$

2) Répartition des forces horizontales à chaque étage

La répartition des forces sismiques peut être effectuée en application de la formule du § 4.3.3.2.3 de l'Eurocode 8 fournie en annexe du sujet de TD.

La formule s'écrit : $F_i = F_b \frac{z_i m_i}{\sum z_j m_j}$

Avec :

F_i Force horizontale agissant au niveau i

F_b Effort tranchant sismique en pied du bâtiment (déterminé plus haut au §1)

z_i Hauteur du niveau i

m_i Masse du niveau i

On obtient ainsi plus bas les forces horizontales sismiques applicables à chaque étage :

Plus bas, on désigne

F_{1x} Force sismique horizontale appliquée à l'étage 1

F_{2x} Force sismique horizontale appliquée à l'étage 2

F_{3x} Force sismique horizontale appliquée à l'étage 3

$$F_{1x} = F_{bx} \cdot \frac{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m}{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m + \frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m + \frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m} \quad (\text{Bien sur les expressions de } g=9.81 \text{ m/s}^2 \text{ se simplifient mais je}$$

les ai mise systématiquement pour indiquer qu'il s'agit bien de masses....et non de poids....)

$$F_{1x} = 1043.8 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = F_{bx} \cdot \frac{\frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m}{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m + \frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m + \frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}$$

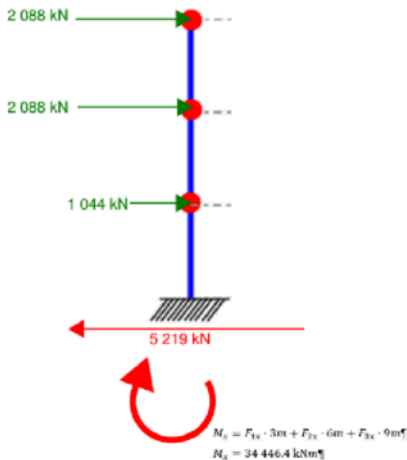
$$F_{2x} = 2087.7 \text{ kN}$$

$$F_{3x} \cong F_{bx} \cdot \frac{\frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m + \frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m + \frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}$$

$$F_{3x} = 2087.7 \text{ kN}$$

On a bien $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_{bx}$ ($F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 5219.1641 \text{ kN}$)

(On représente plus bas les 3 forces sismiques horizontales appliquées sur la structure)



Répartition des forces sismiques horizontales pour un séisme agissant dans la direction x.

(Nota : Nous appelons plus haut M_x le moment de renversement suivant l'axe y résultant de l'application des différentes forces sismiques dans la direction x).

De même

$$F_{1y} = F_{by} \cdot \frac{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m}{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m + \frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m + \frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}$$

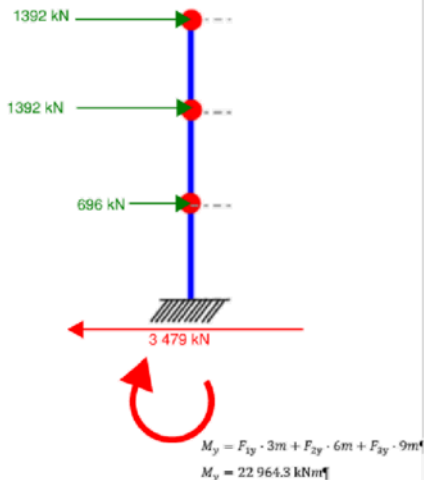
$$F_{1y} = 695.9 \text{ kN}$$

$$F_{2y} = F_{by} \cdot \frac{\frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m}{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m + \frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m + \frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}$$

$$F_{2y} = 1391.8 \text{ kN}$$

$$F_{3y} = F_{by} \cdot \frac{\frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}{\frac{W_1}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 3m + \frac{W_2}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 6m + \frac{W_3}{9.81 \cdot \frac{m}{s^2}} \cdot 9m}$$

$$F_{3y} = 1391.8 \text{ kN}$$



Répartition des forces sismiques horizontales pour un séisme agissant dans la direction y.

3) Le moment de renversement s'écrit:

$$M_x = F_{1x} \cdot 3m + F_{2x} \cdot 6m + F_{3x} \cdot 9m$$

$$M_x = 34\,446.4 \text{ kNm}$$

$$M_y = F_{1y} \cdot 3m + F_{2y} \cdot 6m + F_{3y} \cdot 9m$$

$$M_y = 22\,964.3 \text{ kNm}$$

4) On répartit au prorata de la raideur en flexion l'effort tranchant dans chacun des murs.

La raideur de chacun des murs est proportionnel à $I = bh^3/12$ avec b : largeur du mur et h : longueur du mur

Ce qui revient à répartir l'effort au prorata des h^3 ou h désigne la longueur de chacun des murs.

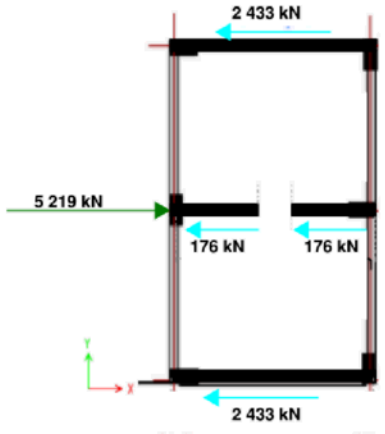
(Dans le sens x , le contreventement est assuré par 2 murs de longueur 10 m et 2 murs de longueur 24 m.

Pour chacun des murs de 10 m de longueur, l'effort interne de cisaillement repris est :

$$Fb_x \cdot \frac{10^3}{10^3 + 10^3 + 24^3 + 24^3} = 176.04 \text{ kN}$$

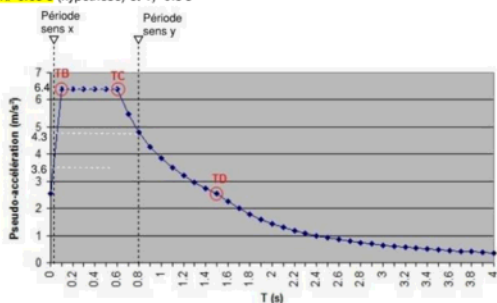
Et pour chacun des murs de 10 m de longueur, l'effort interne de cisaillement repris est :

$$Fb_x \cdot \frac{24^3}{10^3 + 10^3 + 24^3 + 24^3} = 2433.54 \text{ kN}$$



5) On recalcule les différents efforts tranchants en pied du bâtiment avec les nouvelles périodes propres du bâtiment

$T_x=0.05$ s (hypothèse) et $T_y=0.8$ s



$Sd(T_x) = \frac{3.6 \frac{m}{s^2}}{q_x}$ pour un $T_x=0.05$ s pris pour hypothèse ici correspondant à un ajout de murs et à une rigidification de la structure.

$$Sd(T_x) = 1.8 \frac{m}{s^2}$$

$$Fb_x Sd(T_x) \cdot m \cdot \lambda$$

$$Fb_x = 2935.8 \text{ kN}$$

$$Sd(T_y) = \frac{4.3 \frac{m}{s^2}}{q_y}$$

$$Sd(T_y) = 1.4333 \frac{m}{s^2}$$

$$Fb_y = Sd(T_y) \cdot m \cdot \lambda$$

$$Fb_y = 2337.7 \text{ kN}$$

On constate que les efforts sismiques diminuent de manière significative et il est particulièrement notoire de constater que l'effort sismique diminue quand on assouplit significativement la structure (contexte de ce qui se passe dans la direction y). Cela signifie qu'en conception il est parfois plus intéressant de concevoir une structure souple et quelque part moins résistante en statique. Le constat et la lecture du spectre sismique nous indiquent que cette structure plus souple aura des efforts sismiques réduits en pied.

Synthèse plus bas de l'effort horizontal sismique en pied avant et après assouplissement de la structure :

Avant assouplissement $T_y=0.3$ s	Après assouplissement $T_y=0.8$ s
$Fb_y = 3479.5 \text{ kN}$	$Fb_y = 2337.7 \text{ kN}$