

1. RAPPELS DE COURS

1.1. Notations

P_i : Forces extérieures ponctuelles appliquées sur l'arc

$R_Q H_Q$: Réaction verticale/ Horizontale à l'appui Q de l'arc considéré

R_Q^0 : Réaction verticale à l'appui Q pour la poutre isostatique de référence associée

$M^0(x)$: Moment isostatique pour la poutre isostatique de référence associée

φ_k : Angle de changement de repère à l'abscisse x_k pour projection des efforts internes dans le repère global

X, Y : Projection des efforts internes (Effort normal N et tranchant V) dans le repère global x, y .

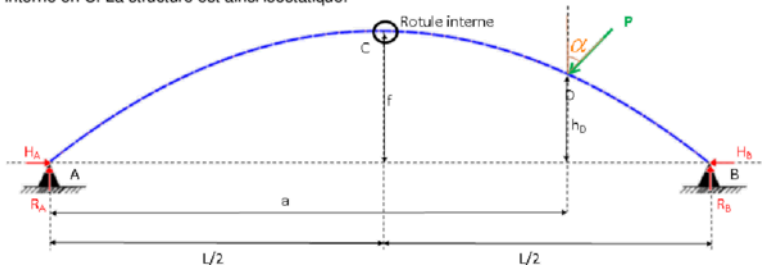
R : Rayon de courbure géométrique d'un arc circulaire.

f : Flèche de l'arc (Hauteur)

1.2. Arcs à 3 articulations

1.2.1. Equations d'équilibre et réactions d'appuis pour une charge de direction quelconque

On considère la structure en arc ci-après bi-articulée aux appuis A et B. La structure est soumise à une charge concentrée P en un point quelconque D, à une distance a de l'appui A. On dispose d'une rotule interne en C. La structure est ainsi isostatique.



Les équations d'équilibre et du moment en C ($M_C=0$) s'écrivent :

$$R_A + R_B - P \cdot \cos \alpha = 0 \quad [\text{Eq. 1-1}]$$

$$H_A - H_B - P \cdot \sin \alpha = 0 \quad [\text{Eq. 1-2}]$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a) - R_A \cdot L = 0 \quad [\text{Eq. 1-3}]$$

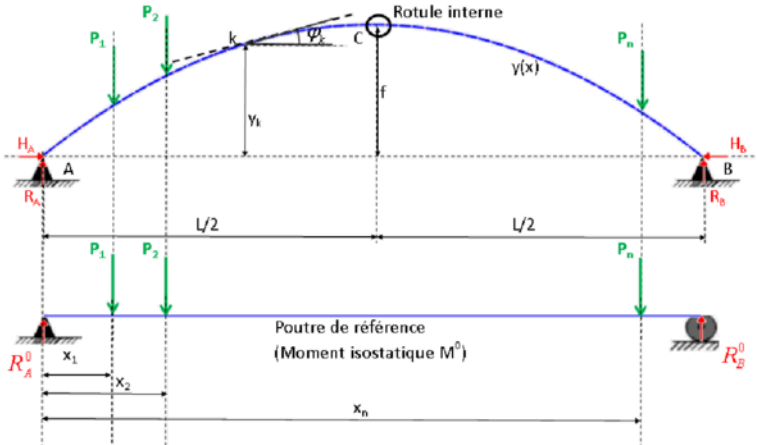
$$\sum M_{\text{section}_C} = 0 \Rightarrow R_A \cdot \frac{L}{2} - H_A \cdot f = 0 \quad [\text{Eq. 1-4}]$$

Soit :

$$R_A = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a)}{L} \quad R_B = P \cdot \cos \alpha - \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a)}{L}$$

$$H_A = \frac{1}{f} \left(\frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L-a)}{2} \right) \quad \text{et} \quad H_B = \frac{1}{f} \left(\frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L-a)}{2} \right) - P \cdot \sin \alpha$$

1.2.2. Réactions d'appuis et Efforts internes pour un arc à 3 articulations soumis uniquement à des charges verticales



On constate que lorsque l'arc est seulement soumis à des charges verticales que : $R_A = R_{A0}$ et $R_B = R_{B0}$
 Par ailleurs, la réaction horizontale (poussée de l'arc) aux 2 appuis d'un arc à 3 articulations vaut :
 $H = H_A = H_B$

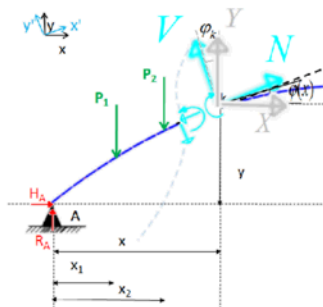
Le moment fléchissant interne vaut 0 au niveau de l'articulation interne en C. Ce qui conduit à écrire :

$$M_C = R_A \cdot \frac{L}{2} - P_1 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) - P_2 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) - H_A \cdot f = 0$$

$$M_C^0 = R_A \cdot \frac{L}{2} - P_1 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) - P_2 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) \quad \text{Soit finalement,} \quad H_A = \frac{M_C^0}{f} \quad [\text{Eq. 1-5}]$$

Par ailleurs les efforts internes (N_k, V_k) dans le repère local $x'y'$ à l'abscisse x_k peuvent être reliés aux efforts projetés (X_k, Y_k) dans le repère global xy pour la même abscisse x_k dans le repère global xy par :

1.3. Efforts dans les repères locaux et globaux



Les efforts internes écrits directement dans le repère local s'écrivent :

$$M(x) = R_A \cdot x - \sum_{\text{gauche}} P_i \cdot (x - x_i) - H_A \cdot y(x)$$

$$V(x) = (R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i) \cdot \cos \varphi(x) - H_A \cdot \sin \varphi(x)$$

$$N(x) = (R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i) \cdot \sin \varphi(x) + H_A \cdot \cos \varphi(x)$$

Pour les arcs soumis uniquement à des charges verticales, on peut également présenter les efforts internes sous la forme :

$$M(x) = M^0(x) - H_A \cdot y(x) ; V(x) = V^0(x) \cdot \cos \varphi_k - H_A \cdot \sin \varphi_k ; N(x) = V^0 \cdot \sin \varphi_k + H_A \cdot \cos \varphi_k$$

$$M^0(x) = R_A \cdot x - \sum_{\text{gauche}} P_i \cdot (x - x_i)$$

$$V^0(x) = R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i$$

Avec

[Eq. 1-6] et

[Eq. 1-7]

Il est parfois commode d'écrire les efforts dans le repère global :

$$\begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \\ -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_A \\ V^0(x) = R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i \end{pmatrix}$$

[Eq. 1-8]

Remarques :

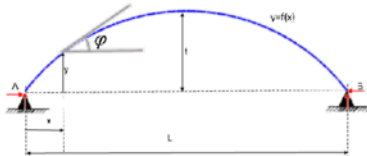
- (i) Le moment fléchissant pour l'arc à 3 articulations est celui de la poutre isostatique de référence réduit de la quantité $H \cdot y_k$. \Rightarrow L'arc à 3 articulations est une structure économique pour les grandes portées.
- (ii) La poussée de l'arc est inversement proportionnelle à la distance verticale de la rotule interne (dite flèche de l'arc).

1.4. Tracés géométriques des arcs

1.4.1. Géométrie prédéfinie

Arc circulaire:

Paramètres pré-définis f et L .



$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} - R + f \quad [\text{Eq. 1-9}]$$

avec

$$R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f} \quad [\text{Eq. 1-10}]$$

$$\sin \varphi = (L - 2x) \cdot \frac{1}{2R} \quad [\text{Eq. 1-11}]$$

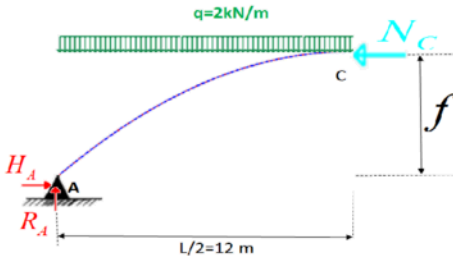
$$\cos \varphi = (y + R - f) \cdot \frac{1}{R} \quad [\text{Eq. 1-12}]$$

1.4.2. Arc funiculaire

On a établi précédemment que le moment fléchissant dans une section quelconque d'un arc vaut :

$$M(x) = M^0(x) - H_A \cdot y(x) \quad . \quad \text{Un arc est dit funiculaire si, pour toute section de l'arc, } M(x) = 0 .$$

Exemple : Cas d'un arc soumis à des charges verticales uniformes



$$R_A = R_B = qL/2$$

On cherche l'équation de la courbe $y(x)$ telle qu'en tout point $M(x)=0$.

On écrit que le moment en A est nul: $\sum M_{/A} = 0$;

$$N_C * f - \left(q * \frac{L}{2}\right) * \frac{L}{4} = 0$$

$$N_C = \frac{q \cdot L^2}{8f} = H_A = H_B$$

Soit

$$\frac{q \cdot L^2}{8f} \cdot y + q \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot x = 0$$

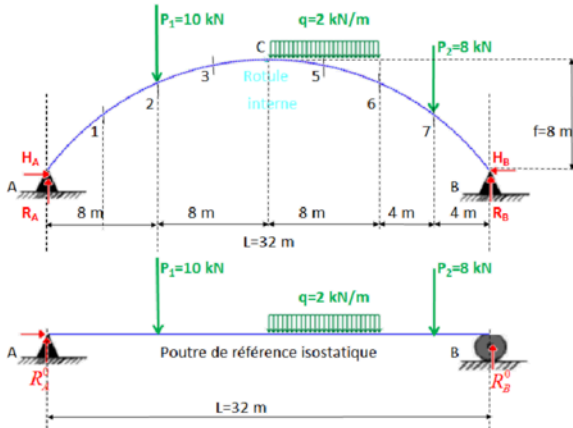
Arc funiculaire => M(x)=0 soit

D'où l'équation de l'arc funiculaire pour un cas de charge uniformément réparti :

$$y = \frac{q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}}{q \cdot L^2 / 8f}$$

1.5. Exemple: Cas d'un arc à 3 articulations

On considère la structure en arc circulaire ci-après :



$f = 8\text{ m}$; $L = 32\text{ m}$ L'équation décrivant la géométrie de l'arc s'écrit :

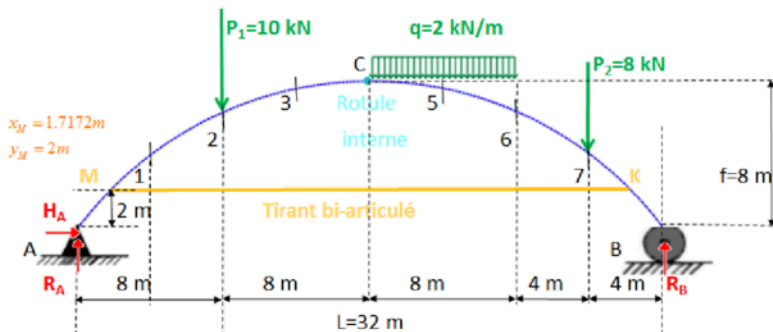
$$y(x) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} - R + f = \sqrt{400 - (16 - x)^2} - 12\text{ (m)}$$

1.1. Déterminer les réactions d'appui de la structure

1.2. Déterminer les efforts internes M, N et V dans les sections de référence prédéfinies ainsi que dans des sections en M et K puis tracer les diagrammes des efforts internes dans la structure

2. EXERCICE N°2

On reprend la structure précédente et on introduit un tirant reliant les points M et K. Simultanément, l'appui en B devient un appui glissant.



2.1. Déterminer les réactions d'appui de la structure

2.2. Déterminer les efforts internes M , N et V dans les sections de référence prédéfinies ainsi que dans des sections en M et K, puis tracer les diagrammes des efforts internes dans la structure

1. RAPPELS DE COURS

1.1. Notations

P_i : Forces extérieures ponctuelles appliquées sur l'arc

$R_Q H_Q$: Réaction verticale/ Horizontale à l'appui Q de l'arc considéré

R_Q^0 : Réaction verticale à l'appui Q pour la poutre isostatique de référence associée

$M^0(x)$: Moment isostatique pour la poutre isostatique de référence associée

φ_k : Angle de changement de repère à l'abscisse x_k pour projection des efforts internes dans le repère global

X, Y : Projection des efforts internes (Effort normal N et tranchant V) dans le repère global x, y .

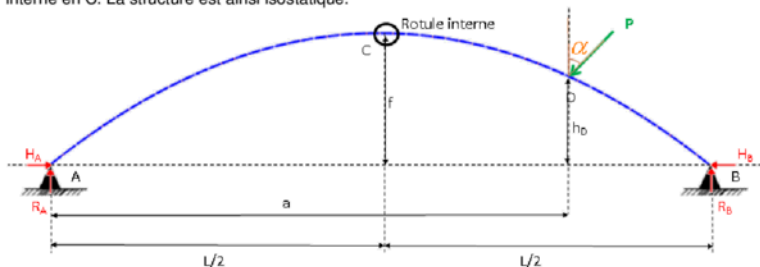
R : Rayon de courbure géométrique d'un arc circulaire.

f : Flèche de l'arc (Hauteur)

1.2. Arcs à 3 articulations

1.2.1. Equations d'équilibre et réactions d'appuis pour une charge de direction quelconque

On considère la structure en arc ci-après bi-articulée aux appuis A et B. La structure est soumise à une charge concentrée P en un point quelconque D, à une distance a de l'appui A. On dispose d'une rotule interne en C. La structure est ainsi isostatique.



Les équations d'équilibre et du moment en C ($M_C=0$) s'écrivent :

$$R_A + R_B - P \cdot \cos \alpha = 0 \quad [\text{Eq. 1-1}]$$

$$H_A - H_B - P \cdot \sin \alpha = 0 \quad [\text{Eq. 1-2}]$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a) - R_A \cdot L = 0 \quad [\text{Eq. 1-3}]$$

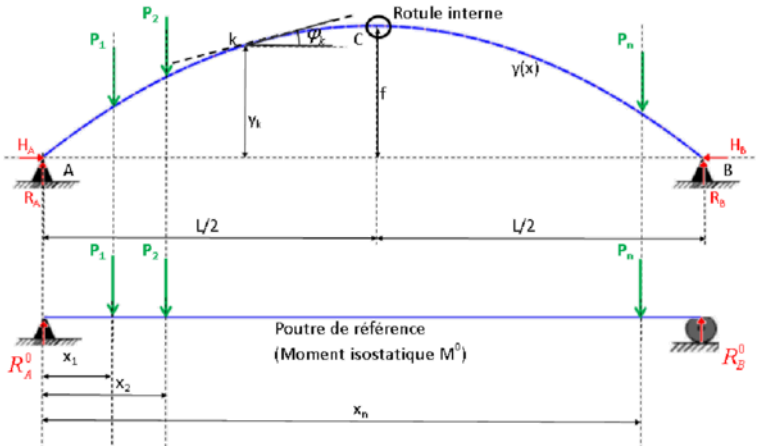
$$\sum M_{\text{section}_C} = 0 \Rightarrow R_A \cdot \frac{L}{2} - H_A \cdot f = 0 \quad [\text{Eq. 1-4}]$$

Soit :

$$R_A = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a)}{L} \quad R_B = P \cdot \cos \alpha - \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a)}{L}$$

$$H_A = \frac{1}{f} \left(\frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a)}{2} \right) \quad \text{et} \quad H_B = \frac{1}{f} \left(\frac{P \cdot \sin \alpha \cdot h_D + P \cdot \cos \alpha \cdot (L - a)}{2} \right) - P \cdot \sin \alpha$$

1.2.2. Réactions d'appuis et Efforts internes pour un arc à 3 articulations soumis uniquement à des charges verticales



On constate que lorsque l'arc est seulement soumis à des charges verticales que : $R_A = R_{A0}$ et $R_B = R_{B0}$
 Par ailleurs, la réaction horizontale (poussée de l'arc) aux 2 appuis d'un arc à 3 articulations vaut :
 $H = H_A = H_B$

Le moment fléchissant interne vaut 0 au niveau de l'articulation interne en C. Ce qui conduit à écrire :

$$M_C = R_A \cdot \frac{L}{2} - P_1 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) - P_2 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) - H_A \cdot f = 0$$

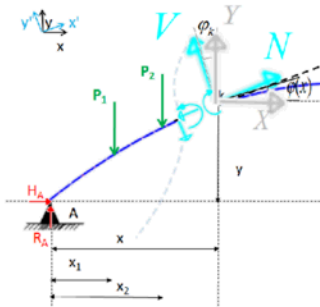
$$M_C^0 = R_A \cdot \frac{L}{2} - P_1 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) - P_2 \cdot \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) \quad \text{Soit finalement,} \quad H_A = \frac{M_C^0}{f} \quad [\text{Eq. 1-5}]$$

On note

Soit finalement,

Par ailleurs les efforts internes (N_k, V_k) dans le repère local $x'y'$ à l'abscisse x_k peuvent être reliés aux efforts projetés (X_k, Y_k) dans le repère global xy pour la même abscisse x_k dans le repère global xy par :

1.3. Efforts dans les repères locaux et globaux



Les efforts internes écrits directement dans le repère local s'écrivent :

$$M(x) = R_A \cdot x - \sum_{\text{gauche}} P_i \cdot (x - x_i) - H_A \cdot y(x)$$

$$V(x) = (R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i) \cdot \cos \varphi(x) - H_A \cdot \sin \varphi(x)$$

$$N(x) = (R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i) \cdot \sin \varphi(x) + H_A \cdot \cos \varphi(x)$$

Pour les arcs soumis uniquement à des charges verticales, on peut également présenter les efforts internes sous la forme :

$$M(x) = M^0(x) - H_A \cdot y(x) ; V(x) = V^0(x) \cdot \cos \varphi_k - H_A \cdot \sin \varphi_k ; N(x) = V^0 \cdot \sin \varphi_k + H_A \cdot \cos \varphi_k$$

$$M^0(x) = R_A \cdot x - \sum_{\text{gauche}} P_i \cdot (x - x_i)$$

$$V^0(x) = R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i$$

Avec

[Eq. 1-6] et

[Eq. 1-7]

Il est parfois commode d'écrire les efforts dans le repère global :

$$\begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \\ -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_A \\ V^0(x) = R_A - \sum_{\text{gauche}} P_i \end{pmatrix}$$

[Eq. 1-8]

Remarques :

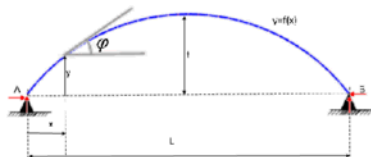
- (i) Le moment fléchissant pour l'arc à 3 articulations est celui de la poutre isostatique de référence réduit de la quantité $H \cdot y_k$. \Rightarrow L'arc à 3 articulations est une structure économique pour les grandes portées.
- (ii) La poussée de l'arc est inversement proportionnelle à la distance verticale de la rotule interne (dite flèche de l'arc).

1.4. Tracés géométriques des arcs

1.4.1. Géométrie prédéfinie

Arc circulaire:

Paramètres pré-définis f et L .



$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} - R + f \quad [\text{Eq. 1-9}]$$

avec

$$R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f} \quad [\text{Eq. 1-10}]$$

$$\sin \varphi = (L - 2x) \cdot \frac{1}{2R} \quad [\text{Eq. 1-11}]$$

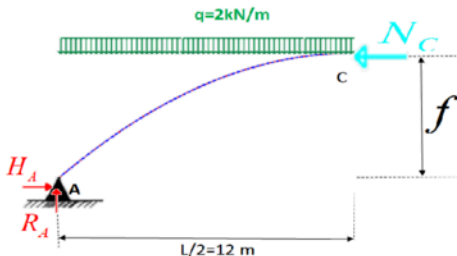
$$\cos \varphi = (y + R - f) \cdot \frac{1}{R} \quad [\text{Eq. 1-12}]$$

1.4.2. Arc funiculaire

On a établi précédemment que le moment fléchissant dans une section quelconque d'un arc vaut :

$$M(x) = M^0(x) - H_A \cdot y(x) \quad \text{Un arc est dit funiculaire si, pour toute section de l'arc, } M(x) = 0.$$

Exemple : Cas d'un arc soumis à des charges verticales uniformes



$$R_A = R_B = qL/2$$

On cherche l'équation de la courbe $y(x)$ telle qu'en tout point $M(x)=0$.

On écrit que le moment en A est nul: $\sum M_{/A} = 0$;

$$N_C * f - \left(q * \frac{L}{2}\right) * \frac{L}{4} = 0$$

$$N_C = \frac{q \cdot L^2}{8f} = H_A = H_B$$

Soit

$$\frac{q \cdot L^2}{8f} \cdot y + q \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot x = 0$$

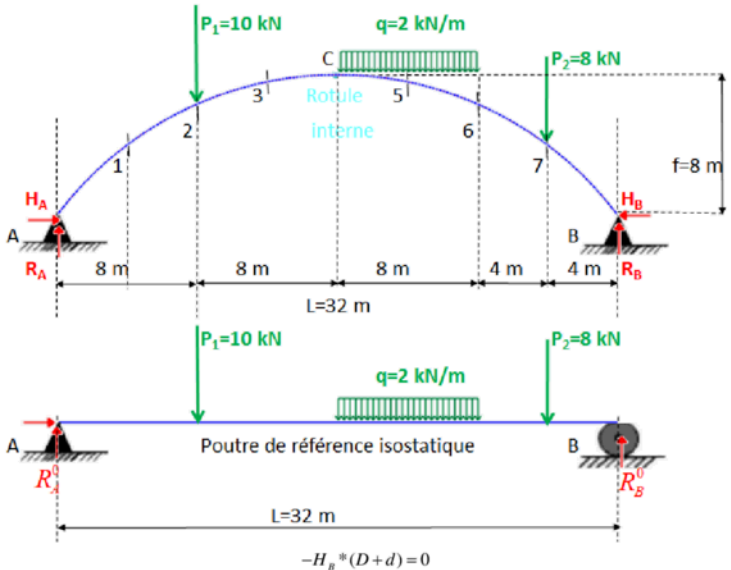
Arc funiculaire $\Rightarrow M(x)=0$ soit

D'où l'équation de l'arc funiculaire pour un cas de charge uniformément réparti :

$$y = \frac{q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}}{\frac{q \cdot L^2}{8f}}$$

1.5. Exemple: Cas d'un arc à 3 articulations

On considère la structure en arc circulaire ci-après :



$f=8\text{ m}$; $L=32\text{ m}$ L'équation décrivant la géométrie de l'arc s'écrit :

$$y(x) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} - R + f = \sqrt{400 - (16 - x)^2} - 12\text{ (m)}$$

Le rayon de courbure de l'arc vaut :

$$R = f/2 + L^2/(8 \cdot f) = 20.0\text{ m}$$

La structure est isostatique, les réactions d'appuis sont déterminés par le principe fondamental de la statique :

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_B = (10 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 20 + 8 \cdot 28) / 32 = 19.5\text{ kN} = R_B^0$$

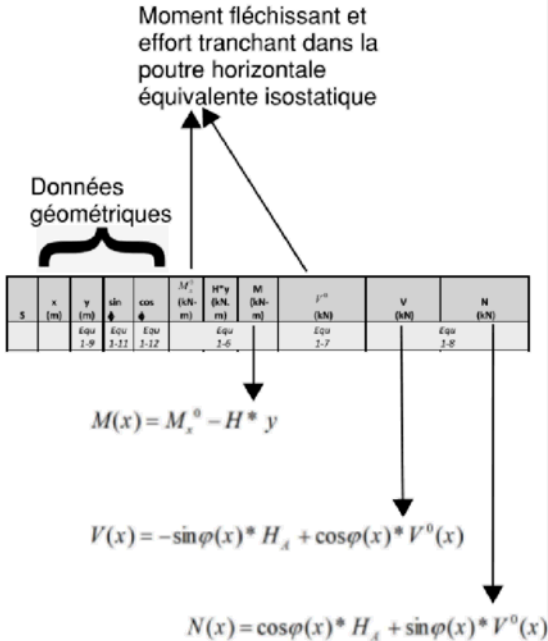
$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow R_A = (10 \cdot 24 + 2 \cdot 8 \cdot 12 + 8 \cdot 4) / 32 = 14.5\text{ kN} = R_A^0 \quad (\text{ou } \sum F_z = 0)$$

Le moment isostatique de référence s'écrit : $M_0 = R_A \cdot 16 = 10 \cdot 8 = 152.0\text{ kN}$

$$H_A = \frac{M_C^0}{f}$$

Par ailleurs, la poussée de l'arc s'écrit : soit $H_A = 152/8 = 19.0\text{ kN}$

Enfin, les efforts internes peuvent être déterminées dans des sections de référence :



S	x (m)	y (m)	sin ϕ	cos ϕ	M_x^0 (kN-m)	H^*y (kN-m)	M (kN-m)	V^0 (kN)	V (kN)	N (kN)
		Equ 1-9	Equ 1-11	Equ 1-12		Equ 1-6		Equ 1-7		Equ 1-8
A	0	0.0	0.8	0.6	0	0.0	0.0	14.5	-6.5	23
1	4	4.0	0.6	0.8	58	76.0	-18.0	14.5	0.2	23.9
2	8	6.3	0.4	0.92	116	120. 3	-4.3	14.5(G) & 4.5(D)	5.7(G) & -3.5(D)	23.2(G) & 19.2(D)
3	12	7.6	0.2	0.98	134	144. 3	-10.3	4.5	0.6	19.5
C/ 4	16	8.0	0	1.00	152	152. 0	0.0	4.5	4.5	19.0
5	20	7.6	-0.2	0.98	154	144. 3	9.7	-3.5	0.37	19.32
6	24	6.3	-0.4	0.92	124	120. 3	3.7	-11.5	-2.94	22.01
7	28	4.0	-0.6	0.80	78	76.0	2.0	-11.5(G) & -19.5(D)	2.2(G) & -4.2(D)	22.1(G) & 26.9(D)
B	32	0.0	-0.8	0.60	0	0.0	0.0	0	3.5	27

