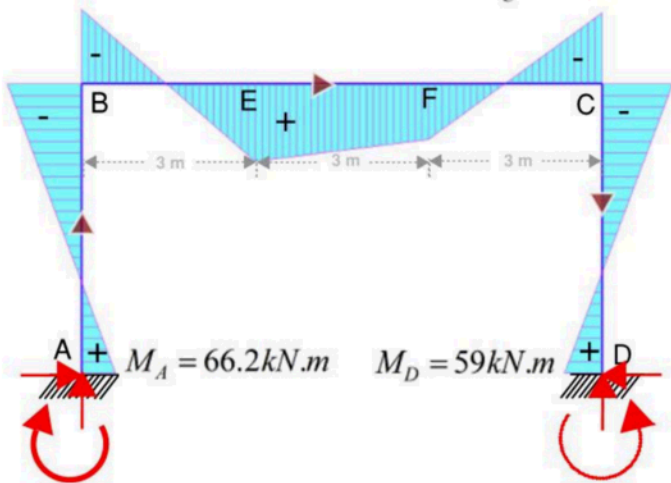


La représentation graphique de ces différents moments est effectuée ci-après :

$$M_B = -132.5 \text{ kN.m}$$

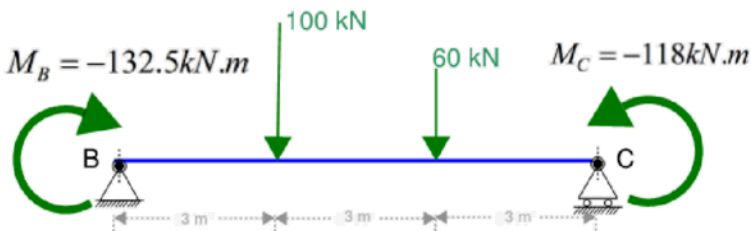
$$M_C = -118 \text{ kN.m}$$



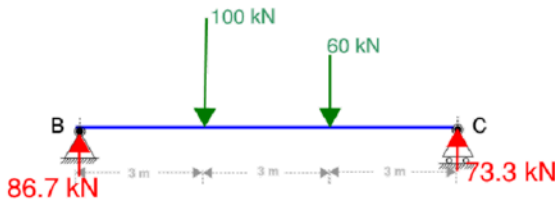
On peut également déterminer les moments en E et F au droit des points d'application des 2 charges ponctuelles de respectivement 100 kN et 60 kN.

On obtient les moments en E et F en isolant la barre BC prise seule avec une configuration d'appuis isostatique et en lui appliquant les différentes forces extérieures :

- Les 2 forces extérieures de 100 kN et 60 kN respectivement aux points E et F
- Les moments aux 2 extrémités de la traverse BC



Dans le système mécanique plus haut, on peut trouver chacune des 2 réactions sous les effets des 2 surcharges isolées 100 kN et 60 kN



Le moment entre B et C sous l'application de ce cas de charge ci-contre vaut :

Pour $0 \leq x \leq 3m$

$$86.7 * x$$

Pour $3 \leq x \leq 6m$

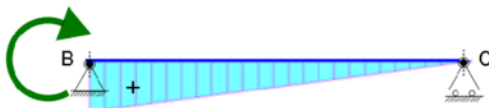
$$86.7 * x - 100 * (x - 3)$$

Pour $6 \leq x \leq 9m$

$$73.3 * (9 - x)$$

On se rappelle simultanément des équations respectives de l'expression des moments dans la poutre sous l'application des couples respectifs en B et C :

M_B

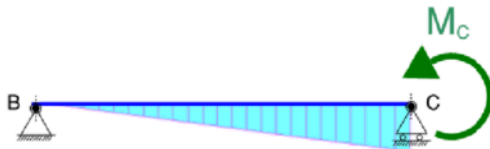


Le moment entre B et C sous l'application de ce cas de charge ci-contre vaut :

$$M_B \left(1 - \frac{x}{L_{BC}}\right)$$

Le moment entre B et C sous l'application de ce cas de charge ci-contre vaut :

$$M_C \left(\frac{x}{L_{BC}}\right)$$



On peut finalement exprimer le moment sur chaque tronçon de longueur 3 m par sommation des 3 moments plus haut obtenus pour chacun des cas de charge unitaire .

$0 \leq x \leq 3m$

$$M(x) = 86.7 * x + M_B \left(1 - \frac{x}{L_{BC}}\right) + M_C \left(\frac{x}{L_{BC}}\right)$$

Pour $x=3m$

$$M(x=3m) = 86.7 * 3 - 132.5 \left(1 - \frac{3}{9}\right) - 118 \left(\frac{3}{9}\right) = 132.4 kN.m$$

$3 \leq x \leq 6m$

$$M(x) = 86.7 * x - 100 * (x - 3) + M_B \left(1 - \frac{x}{L_{BC}}\right) + M_C \left(\frac{x}{L_{BC}}\right)$$

$6 \leq x \leq 9m$

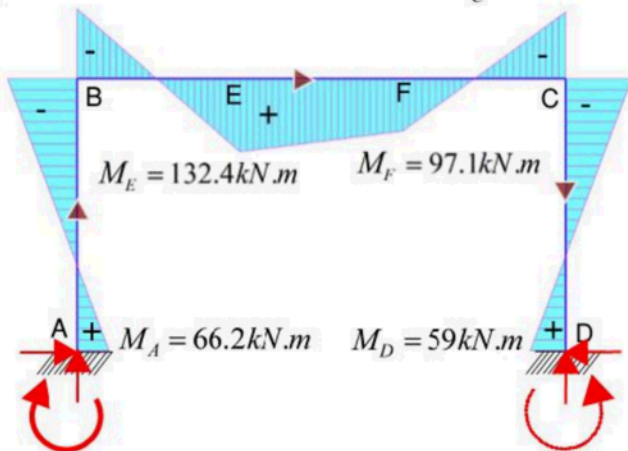
$$M(x) = 73.3 * (9 - x) + M_B \left(1 - \frac{x}{L_{BC}}\right) + M_C \left(\frac{x}{L_{BC}}\right)$$

Pour $x=6m$

$$M(x=6m) = 73.3 * (9 - 6) - 132.5 \left(1 - \frac{6}{9}\right) - 118 \left(\frac{6}{9}\right) = 97.1 kN.m$$

$$M_B = -132.5 \text{ kN.m}$$

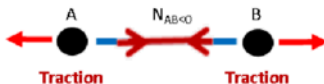
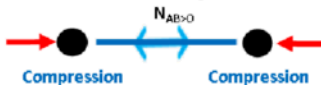
$$M_C = -118 \text{ kN.m}$$



1. RAPPELS DE COURS

1.1. Conventions de signe

On retient les conventions de signe suivante :



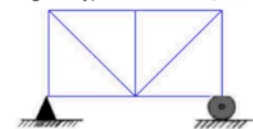
1.2. Systèmes isostatiques / hyperstatiques

On note b le nombre de barres, r le nombre de réactions d'appui et n le nombre total de nœuds.

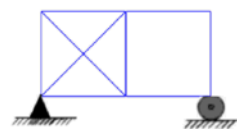
- 2 n équations obtenues pour les nœuds rotulés (équilibre vertical et équilibre horizontal)

Les inconnus sont les b efforts normaux relatifs à chaque barre et les r réactions d'appuis.

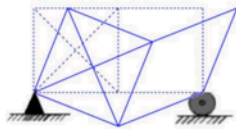
Le degré d'hyperstaticité est $I_{s,treillis} = b + r - 2n$



$b=9$; $r=3$; $n=6$
 \Rightarrow Isostatique



$b=9$; $r=3$; $n=6$ mais triangulation non OK \Rightarrow Mécanisme.



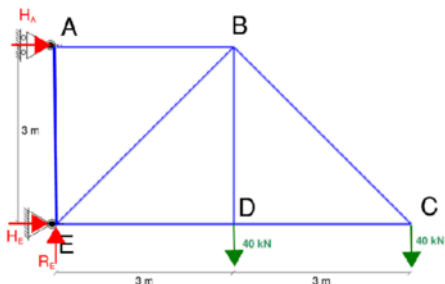
1.3. Différentes méthodes d'analyse

1.3.1. Méthode des nœuds

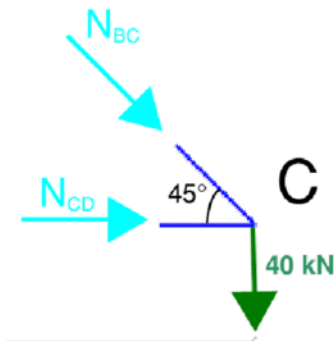
La méthode des nœuds consiste à isoler 1 nœud de la structure et à déterminer les efforts dans 2 barres concourantes en ce nœud pour lesquelles les efforts internes sont inconnus. Cette méthode peut être appliquée de proche en proche et l'ensemble des efforts internes peuvent ainsi être obtenus.

La méthode consiste à écrire $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$ pour chacun des nœuds.

Exemple 1



Méthode
des
nœuds au
nœud C



$$N_{BC_vertical} + 40\text{kN} = 0$$

Et

$$N_{BC_horizontal} + N_{CD} = 0$$

Avec:

$N_{BC_vertical}$ projection verticale de la composante verticale d'effort normal de la barre BC.

$N_{BC_horizontal}$ projection horizontale de la composante horizontale d'effort normal dans la barre BC.

\Leftrightarrow

$$N_{BC} \cdot \sin 45^\circ + 40\text{kN} = 0$$

$$\Leftrightarrow N_{BC} = -40 \cdot (\sqrt{2})\text{kN}$$

(Traction))

$$N_{BC} \cdot \cos 45^\circ + N_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow N_{CD} = +40\text{kN (C)}$$

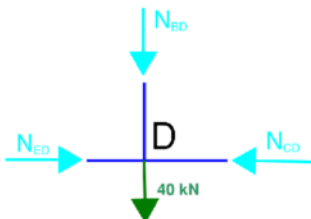
$$N_{BD} + 40\text{kN} = 0$$

$$\Rightarrow N_{BD} = -40\text{kN}$$

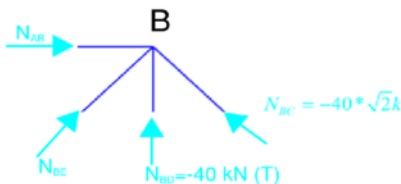
$$N_{ED} = N_{CD}$$

$$\Leftrightarrow N_{ED} = 40\text{kN (C)}$$

Méthode
des
nœuds au
nœud D



Méthode
des
nœuds au
nœud B



Seules les valeurs de N_{AB} et N_{BE} sont inconnues donc les 2 équations d'équilibre du nœud B sont adaptées.

$$N_{BE_vertical} + N_{BD} + N_{BC_vertical} = 0$$

$$\Rightarrow N_{BE_vertical} = 80\text{kN}$$

Et finalement

$$N_{BE} = N_{BE_vertical} / \cos(45^\circ)$$

$$\text{Soit } N_{BE} = 80 \cdot \sqrt{2}\text{kN (C)}$$

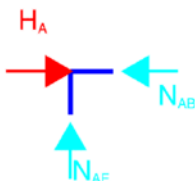
De même, la projection des forces horizontales permet d'obtenir la valeur de N_{AB} .

$$N_{AB} + N_{BE_horizontal} - N_{BC_horizontal} = 0$$

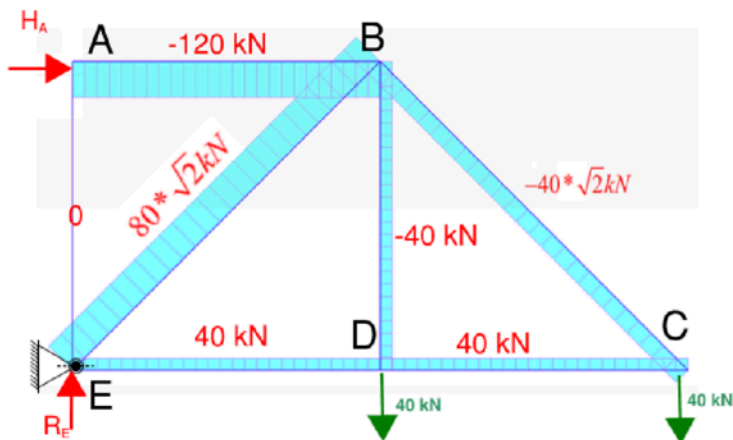
$$N_{AB} = -80 - 40 = -120 \text{ kN}$$

$$N_{AE} = 0$$

Méthode
des
nœuds au
nœud A

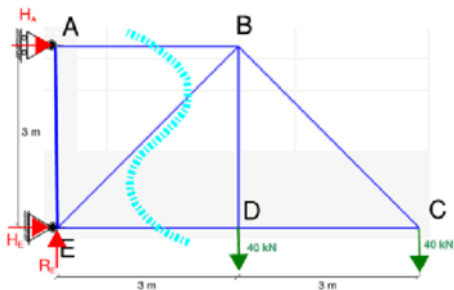


D'où finalement :

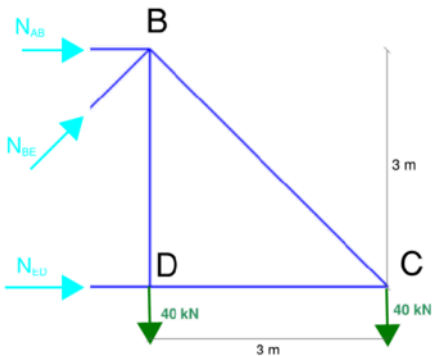


1.3.2. Méthode des coupures

La méthode des coupures permet d'obtenir directement les efforts dans des barres quelconques. Elle nécessite de considérer une coupure interceptant 3 barres dont 2 concourantes en 1 même point.



La coupure présentée plus haut permet d'obtenir directement les efforts dans chacune des barres AB, EB et ED.



L'équation d'équilibre $\sum M_B = 0$ permet

d'obtenir une équation permettant d'obtenir directement la valeur de N_{ED} .

$$N_{ED} * 3 - 40 * 3 = 0$$

$$\Rightarrow N_{ED} = 40 \text{ kN}$$

Puis on utilise les 2 autres équations du PFS pour obtenir les valeurs de N_{BE} et N_{AB} .

$$\sum F_y = 0$$

$$N_{BE_vertical} - 80 \text{ kN} = 0$$

$$N_{BE} * \cos(45^\circ) - 80 \text{ kN} = 0$$

$$N_{BE} = 80 * \sqrt{2} \text{ kN}$$

La 2ème équation du PFS s'écrit

$$\sum F_x = 0$$

$$N_{BE_horizontal} + N_{AB} + N_{ED} = 0$$

$$\Rightarrow N_{AB} = -80 - 40 = -120 \text{ kN}$$

1.3.3. Etude des déformations

L'application de l'équation de Bertrand de Fontviolant s'écrit directement :

$$\Delta = \sum_{Struct.} n_i \frac{N_i L_i}{EA_i}$$

Avec :

N_i : Efforts normal pour chacune des barres soumises au chargement réel sur la structure

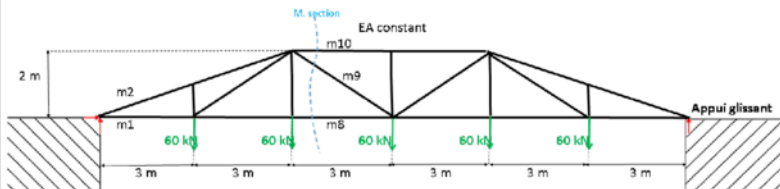
n_i : Efforts normal pour chacune des barres soumises à une force unitaire au point où la déformation est examinée.

L_i : Longueur individuelle pour chacune des barres de la structure treillis

A_i : Section pour chacune des barres

2. EXERCICE

On considère le pont en treillis ci-après.



- 2.1. Déterminer les réactions d'appui
- 2.2. Par la méthode des nœuds, Déterminer directement les efforts dans les membrures notées m1 et m2 à proximité de l'appui rotulé
- 2.3. Par la méthode des coupures, déterminer les efforts dans les membrures m8, m9 et m10
- 2.4. Déterminer les efforts internes dans les différentes membrures de la structure
- 2.5. Déterminer la flèche verticale à mi-portée par application de l'équation de Bertrand de Fontviolat.

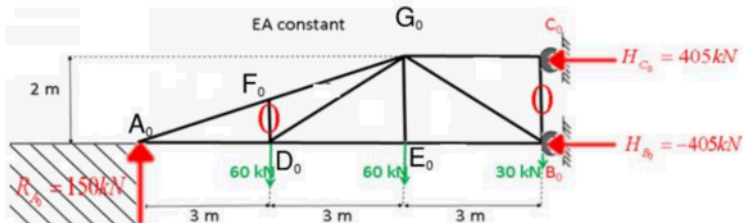
Solution :

2.1 Détermination des réactions d'appui.

$$\sum M_{\text{l'appui_gauche}} = 0 \Rightarrow -60kN * (3+6+9+12+15) + R_{\text{appui_glissant}} * 18 = 0$$

$$R_{\text{appui_glissant}} = 150kN = R_{\text{appui_fixe}}$$

Le système étudié est équivalent à la structure de demi-treillis ci-après (comportant la demi-structure).



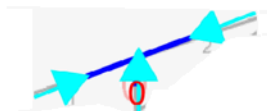
Cette demi-structure, du fait de la symétrie a une déformation exactement identique à celle de la structure étudiée. Elle peut donc être utilisée par la suite.

On peut ainsi déterminer la réaction d'appui en C0

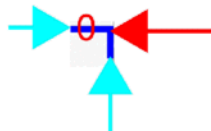
$$H_{C0} * 2 + 60kN * (3+6) - 150kN * 9 = 0 \text{ soit: } H_{C0} = 405kN \text{ et } H_{B0} = -405kN$$

Sur la figure plus haut, nous avons immédiatement indiqué que les efforts dans 2 barres (respectivement FD et B0C0) étaient nulles.

Ceci provient du fait des intersections de barres suivantes :

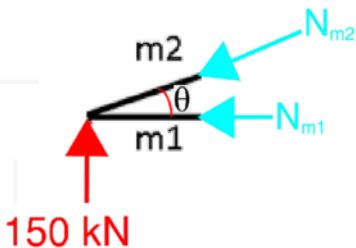


Croisement des barres au nœud F



Croisement des barres au nœud C0

2.2 La méthode des nœuds permet de déterminer directement les efforts dans les membrures m1 et m2



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 150 - N_{m2, \text{vertical}} = 0 \text{ avec } N_{m2, \text{vertical}}$$

désigne la projection verticale de l'effort normal dans la membrure m2.

$$150 - N_{m2} * \sin \theta = 0 \Rightarrow N_{m2} = 150 / \sin \theta \text{ avec}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = 1/20$$

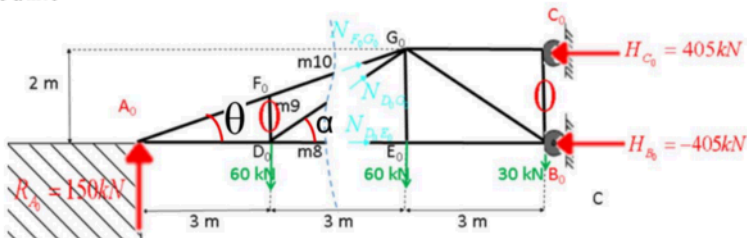
$$N_{m2} = 474.34 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{m2} * \cos \theta + N_{m1} = 0$$

$$\Rightarrow N_{m1} = -N_{m2} * \cos \theta = -474.34 * \frac{6}{\sqrt{6^2 + 2^2}}$$

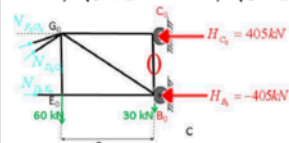
$$N_{m1} = -450 \text{ kN}$$

2.3 La méthode des coupures permet de déterminer les efforts dans les membrures définies précédemment m8 à m10



On appelle α l'angle entre les barres D_0E_0 et D_0G_0 et θ l'angle entre les barres A_0D_0 et A_0F_0 .

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} ; \cos \theta = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 2^2}} \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{6^2 + 2^2}}$$



On écrit l'équilibre des moments par rapport au point G_0 qui nous permettra de trouver l'effort dans la barre D_0E_0 :

$$\sum M_{/G_0} = 0 \Rightarrow N_{D_0E_0} * 2\text{m} - H_{B_0} * 2\text{m} + 30\text{kN} * 3\text{m} = 0 \text{ soit:}$$

$$N_{D_0E_0} = -360 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \text{ et } \sum F_y = 0 \text{ s'écrivent respectivement :}$$

$$N_{D_0F_0} + N_{D_0G_0, \text{horizontal}} + N_{F_0G_0, \text{horizontal}} - 405 + 405 = 0$$

$$N_{D_0G_0, \text{vertical}} + N_{F_0G_0, \text{vertical}} - 90 = 0$$

En remplaçant

$$N_{D_0G_0_horizontal} = N_{D_0G_0} * \cos\alpha$$

$$N_{F_0G_0_horizontal} = N_{F_0G_0} * \cos\theta$$

$$N_{D_0G_0_vertical} = N_{D_0G_0} * \sin\alpha$$

$$N_{F_0G_0_vertical} = N_{F_0G_0} * \sin\theta$$

On obtient un système de 2 équations à 2 inconnus ($N_{D_0G_0}$ et $N_{F_0G_0}$) à résoudre.

$$N_{D_0G_0} + N_{D_0G_0} * \cos\alpha + N_{F_0G_0} * \cos\theta = 0$$

$$N_{D_0G_0} * \sin\alpha + N_{F_0G_0} * \sin\theta - 90 = 0$$

⇒ On résout le système à 2 équations et 2 inconnus et on obtient finalement

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\theta \\ \sin\alpha & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108.1161 \\ 474.2947 \end{bmatrix}$$

$$N_{D_0G_0} = -108kN \text{ et } N_{F_0G_0} = 474kN$$

Dans les expressions précédentes,

$N_{D_0G_0_horizontal}$ Projection horizontale de l'effort normal dans la barre D_0G_0 .

$N_{D_0G_0_vertical}$ Projection verticale de l'effort normal dans la barre D_0G_0 .

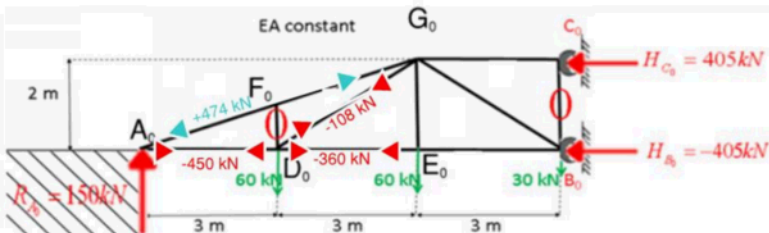
$N_{F_0G_0_horizontal}$ Projection horizontale de l'effort normal dans la barre F_0G_0 .

$N_{F_0G_0_vertical}$ Projection verticale de l'effort normal dans la barre F_0G_0 .

2.3

A ce stade, nous disposons d'un certain nombre de valeurs d'effort normal dans un nombre significatif de barres.

Celles ci sont représentées

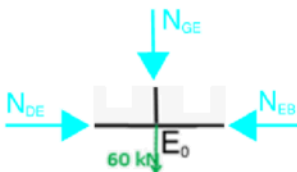


Il nous reste uniquement à déterminer les efforts dans les barres E_0G_0 , E_0B_0 , G_0B_0 , et G_0C_0 .

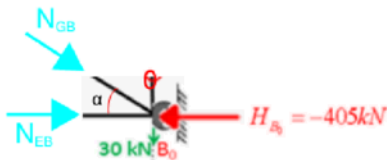
On détermine successivement les efforts par la méthode des nœuds ou la méthode des coupures.

Ici la méthode des nœuds permet de déterminer systématiquement les efforts (car chaque écriture des 2 équations d'équilibre des nœuds est associée à un maximum de 2 inconnus constituées par les efforts internes d'effort normal dans 2 barres).

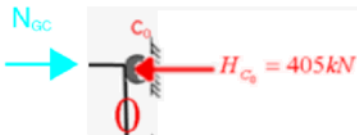
Equilibre du
nœud E_0



Equilibre du
nœud B_0



Equilibre du
nœud C_0



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$N_{GE} + 60 \text{ kN} = 0$$

$$\text{Soit } N_{GE} = 60 \text{ kN (Traction)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_{DE} - N_{EB} = 0$$

$$\text{Soit } N_{EB} = -360 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

é
Avec $N_{GB_vertical}$ projection
verticale de l'effort normal
dans la barre GB.

Par ailleurs, on a

$$N_{GB_vertical} = N_{GB} \cdot \sin \alpha$$

$$N_{GB} = (-30) / \sin \alpha \text{ avec}$$

comme précédemment

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

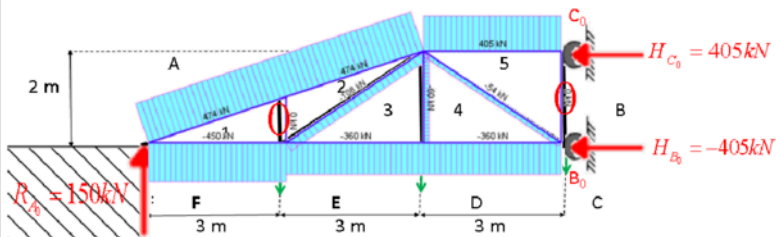
Soit finalement

$$N_{GB} = (-30) / \sin \alpha$$

$$N_{GB} = -54 \text{ kN}$$

$$N_{GC} = 405 \text{ kN}$$

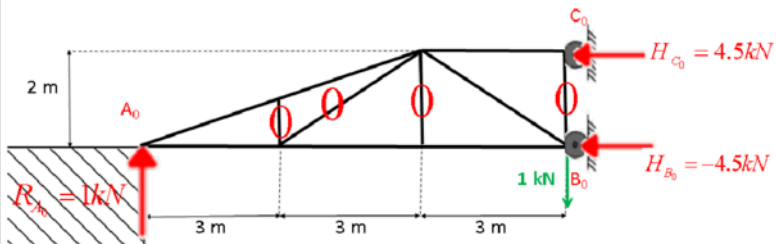
Finalement, on peut représenter la structure et les efforts dans chacune des barres.



2.4 La détermination de la flèche en B_0 est obtenu par l'équation de Bertrand de Fontviolat.

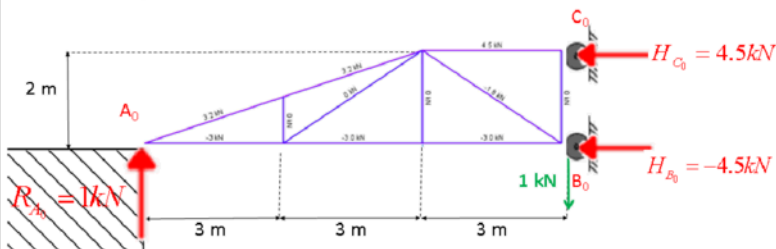
On a donc besoin d'étudier la structure soumise à une charge unitaire en B_0 qui permettra le calcul de la déformation verticale en B_0 .

On identifie dans cette structure soumise à l'application d'une charge unitaire en B_0 immédiatement les barres à efforts nuls.



Puis, on obtient les efforts dans chacune des barres comme précédemment par les 2 méthodes à disposition (méthode des nœuds ou méthode des coupures).

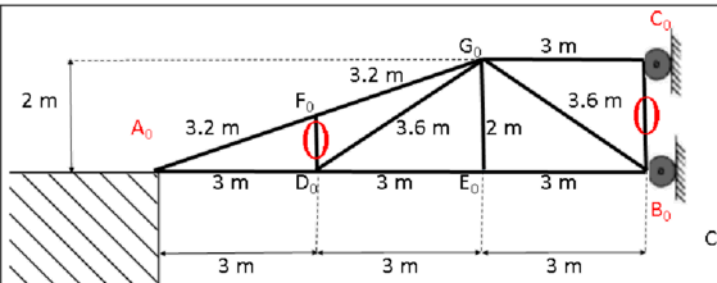
On obtient :



On peut ensuite calculer la flèche :

$$\Delta = \sum_{Struct.} n_i \frac{N_i L_i}{EA_i}$$

Les dimensions géométriques pour chacune des barres sont mentionnées ci-après :



Et enfin, la flèche à mi-portée de la structure treillis peut être calculée :

Barre	N(kN)	n(kN)	L(m)	AE (kN)	$n \cdot N \cdot L / AE$
A ₀ D ₀	-	-	3.0	AE	4050 /AE
D ₀ E ₀	-	-	3.0	AE	3240 /AE
E ₀ B ₀	-	-	3.0	AE	3240 /AE
A ₀ F ₀	474	3.2	3.2	AE	4854 /AE
F ₀ G ₀	474	3.2	3.2	AE	4854 /AE
G ₀ C ₀	405	4.5	3.0	AE	5468 /AE
B ₀ G ₀	-54	-	3.6	AE	349.9 /AE
Flèche à mi-portée					26055 /AE

Avec A : Section des profilés retenus pour le treillis (ici on fait l'hypothèse que toutes les barres ont la même section.

Et E : Module Young du matériau.