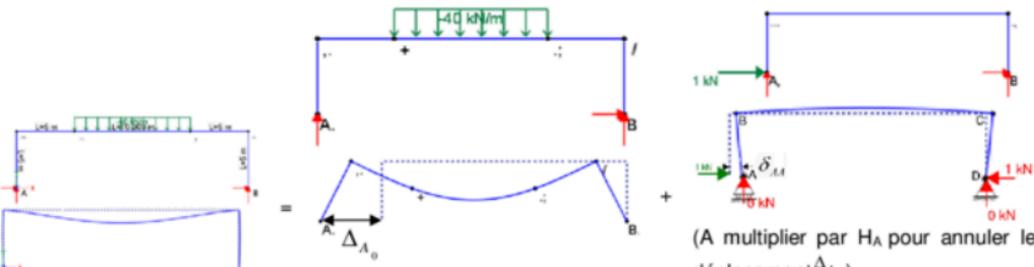


3.1. La structure est une fois hyperstatique

**Nota : Le choix de l'inconnu hyperstatique sera impérativement la poussée horizontale puisque le PFS permet de déterminer les réactions verticales en A et D.**

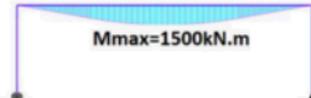


**Portique réel**

=

Portique rendue isostatique avec chargement réel

**Système mécanique 0 (isostatique avec chargement réel)**



$M_{0max} = 1500 \text{ kN.m}$   
 Courbe des moments désignée par **M<sub>0</sub>** par la suite de l'exemple

On écrit plus bas les expressions analytique du moment fléchissant sur chaque tronçon de la traverse :

Pour  $0 \leq x \leq 5m$   $M_0(x) = 200x$   
 Pour  $5m \leq x \leq 20m$

$$M_0(x) = 200x - 40 * \frac{(x-5)^2}{2}$$

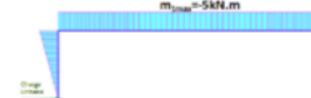
Pour  $15m \leq x \leq 20m$

$$M_0(x) = 200 * (-x + 20)$$

(A multiplier par  $H_A$  pour annuler le déplacement  $\Delta_{A_0}$ )

Portique isostatique avec chargement fictif associé à l'inconnu hyperstatique

**Système mécanique (isostatique avec chargement fictif unitaire en A)**



$m_{max} = -5 \text{ kN.m}$   
 Courbe des moments désignée par **m<sub>1</sub>** par la suite de l'exemple

On écrit plus bas les expressions analytique du moment fléchissant sur la traverse :

Pour  $0 \leq x \leq 20m$

$$m_1(x) = -5kN.m$$

Le moment dans le poteau AB s'écrit pour  $0 \leq y \leq 5m$

$$m_1(y) = -y$$

L'équation fondamentale de compatibilité des déformations ( $\rightarrow$ )  $0 = \Delta_A + H_A \delta_{AA}$

La déformation horizontale en A  $\Delta_A$  en pied du portique rendu isostatique (système 0) s'obtient, par application du théorème de Castigliano dit aussi équation de BDF (Bertrand de Fontviolant) :

$$\Delta_A = \int_0^{structure} \frac{M_0 m_1}{E.I} ds = 2 * \int_0^5 \frac{(0) * (1y) dy}{E.I} + 2 * \int_0^5 \frac{(200x) * (-5) dx}{E.I} + 2 * \int_5^{10} \frac{(200x - 40 * \frac{(x-5)^2}{2}) * (-5) dx}{E.I}$$

$$\Delta_A = \frac{1}{E.I} * (-25000 - 66666.7) = \frac{-91667}{E.I}$$

Le calcul de  $\Delta_A$  peut également être obtenu par les intégrales de Mohr :

$$\Delta_A = 2x \int_0^5 \frac{1}{EI} x \cdot \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} dx + 1x \int_0^{10} \frac{1}{EI} x \cdot \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} dx + 1x \int_0^{10} \frac{1}{EI} x \cdot \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} * [2 \cdot 0.5 \cdot (1000) \cdot (-5) \cdot 5 + 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 500 \cdot (-5) + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 2 \cdot (-5)]$$

Soit finalement  $\Delta_A = -\frac{91666.7}{EI}$  (On retrouve bien la même valeur avec les intégrales de Mohr).

De la même manière, on peut calculer la déformation  $\delta_{AA}$  du portique en A sous l'application d'une charge unitaire en A.

$$\delta_{AA} = \int_0^{\text{Structure}} \frac{m_1^2}{E.I} ds \text{ soit } \delta_{AA} = 2 * \int_0^5 \frac{(-y)^2}{E.I} dy + \int_0^{20} \frac{(-5)^2}{E.I} dy \text{ ce qui donne : } \delta_{AA} = \frac{583}{EI}$$

On peut aussi obtenir la valeur de  $\delta_{AA}$  par les intégrales de Mohr

$$\delta_{AA} = 2x \int_0^5 \frac{1}{EI} x \cdot \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} dx + 1x \int_0^{20} \frac{1}{EI} x \cdot \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} dx$$

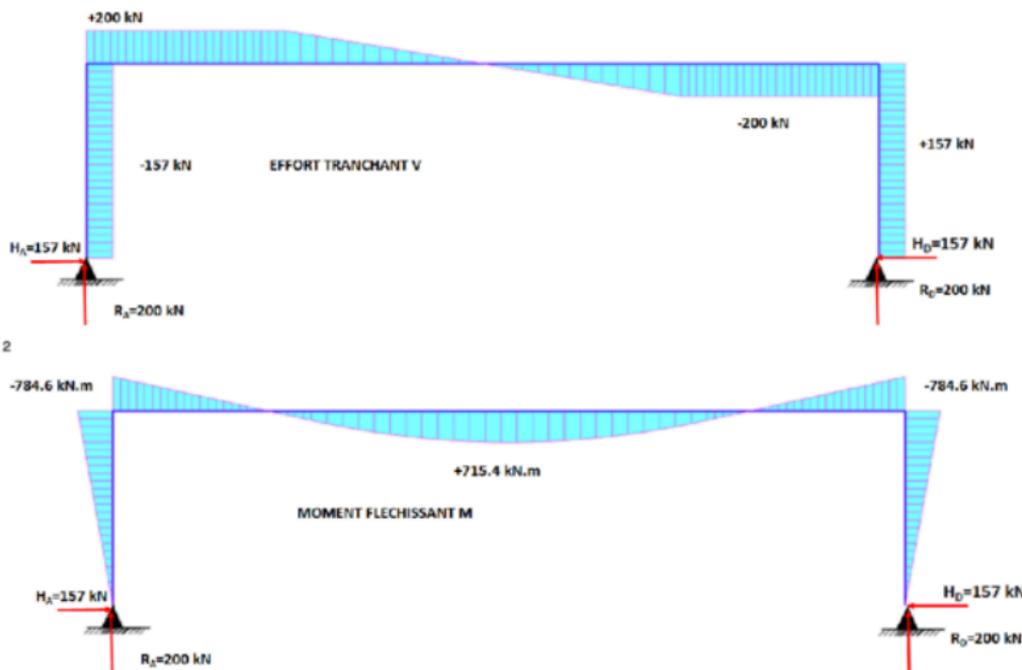
$$\text{Ce qui donne : } \delta_{AA} = \frac{1}{EI} * \left[ 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-5)^2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 \cdot (-5)^2 \right] = \frac{583.3}{EI}$$

On en déduit la force horizontale  $H_A$  en injectant  $\Delta_A$  et  $\delta_{AA}$  dans l'équation fondamentale de compatibilité des déformations.

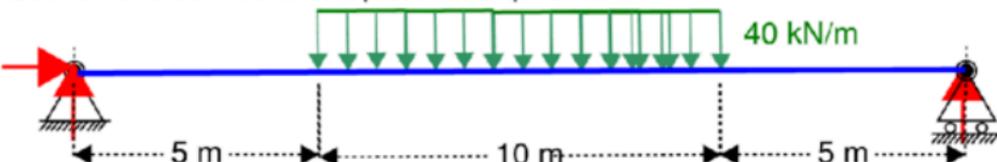
$$H_A = \frac{-\Delta_A}{\delta_{AA}} = 157 \text{ kN} \text{ (} H_A \text{ est la réaction horizontale en A du système hyperstatique)}$$

Les diagrammes d'efforts internes pour le système complet sont tracés plus bas :





Nota : L'intérêt d'avoir encasturé les traverses dans les têtes de poteaux est notoire. Si la conception comportait des liaisons avec articulation à la jonction traverse poteau (en disposant par exemple de corbeaux en tête de poteaux), le moment à mi-travée de la traverse s'obtiendrait par le calcul du moment à mi-travée de la traverse isostatique suivante :



Et le moment max vaut :  $M_{\max} = M_{\text{iso}} = 1\,500 \text{ kN.m}$

⇒ On retrouve bien le fait que les structures hyperstatiques permettent de réduire les efforts et de diminuer les sections des profilés et les quantités de matière ainsi que le bilan carbone ☺

## 1. INTÉGRALES DE MOHR

Intégrales de Mohr (valeurs de  $\frac{1}{L} \int_0^L M' M'' ds$ )

	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{M_3}{6} (2M_1 + M_2)$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_4}{6} (M_1 + 2M_2)$	$\frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} M_1 M_4$
	$\frac{M_4}{6} (2M_3 + M_4)$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 + \frac{1}{3} M_2 M_4$ $\frac{1}{6} M_1 M_4 + \frac{1}{6} M_2 M_3$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$ $+ \frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_4}{3} (M_3 + M_4)$
	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3$	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3 +$ $\frac{1+b}{6} M_2 M_3$	$\left[ \frac{1}{3} - \frac{(b-a)^2}{6K} \right] M_1 M_3$ $a < b \rightarrow K = b(1-a)$ $a > b \rightarrow K = a(1-b)$	$\frac{1+b-b^2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\left[ (3-b)M_1 + bM_2 \right]$ $\frac{b}{6} M_3$	$\frac{2b-a + \frac{(b-a)^2(1-b)}{K}}{6} M_1 M_3$ pour K, voir ci-dessus	$\frac{b^2(2-b)}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1+a-a^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{8}{15} M_1 M_3$
	$\frac{1}{4} M_1 M_3$	$\frac{1}{12} (3M_1 + M_2) M_3$	$\frac{3-3a+a^2}{12} M_1 M_3$	$\frac{1}{5} M_1 M_3$
	$\frac{1}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) M_4$	$\frac{1+a+a^2}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{5} M_1 M_4$

## 1. RAPPELS DE COURS

### 1.1. Principe

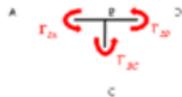
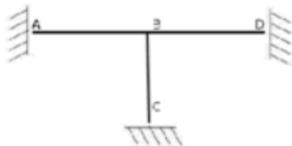
Dans la méthode des rotations, nous examinons les différents couples exercés à un nœud d'une structure par les différentes barres de l'ossature concourantes au nœud examiné. Les équations d'équilibre de rotation des différents nœuds permettent de calculer les rotations aux extrémités de chacune des barres et d'en déduire les moments aux nœuds pour la structure examinée.

### 1.2. Notations

On retient les notations suivantes :

- $\Gamma_{ij}$  : Couple exercé par la barre  $ij$  sur le nœud  $i$  (convention signe  $\Gamma_{ij} > 0$  dans le sens trigonométrique)
- $\bar{\Gamma}_{ij}$  : Couple exercé par la barre  $ij$  (prise bi-encastree) sur le nœud  $i$  soumis à son chargement sur la travée  $ij$ . (convention signe  $\bar{\Gamma}_{ij} > 0$  dans le sens trigonométrique)
- $M_{ij}$  : Moment à l'extrémité  $i$  de la barre  $ij$  (avec son signe suivant conventions RDM)
- $\bar{M}_{ij}$  : Moment à l'extrémité  $i$  de la barre  $ij$  prise bi-encastree (avec son signe suivant conventions RDM)
- $V_{ij}$  : Effort tranchant à l'extrémité  $i$  de la barre  $ij$  (avec son signe suivant conventions RDM)
- $R_{ij}$  : Réaction d'appui à l'extrémité  $i$  de la barre  $ij$  (avec la convention de signe  $R_{ij} > 0$  si réaction ascendante).
- $\omega_{ij}$  : Rotation à l'extrémité  $i$  de la barre  $ij$  (rappel convention signe  $\omega_{ij} > 0$  dans le sens trigonométrique).

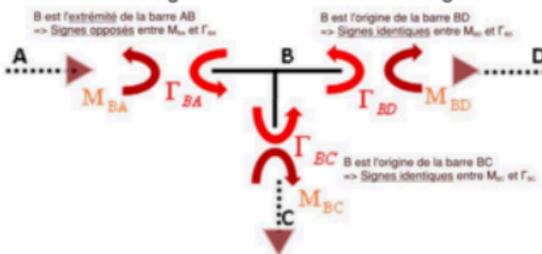
**Nota important :** On attire l'attention sur les signes des moments internes dans cette méthode.



Convention de signe retenue pour les couples exercés sur les nœuds (exemple du nœud B)

$\Gamma_{ij}$  désigne l'action de la barre  $ij$  sur le nœud  $i$  sous les effets des rotations des nœuds en  $i$  et  $j$

Convention de signe :  $\Gamma_{ij} > 0$  dans le sens trigonométrique



Ci-contre on a superposé les flèches respectant les conventions de la RDM quand il s'agit de représenter les moments fléchissants  $M_{ij}$  (c'est-à-dire que toutes les flèches des moments sont telles que la fibre inférieure de chacune des barres est tendue) et des flèches systématiquement dans le sens horaire quand il s'agit de représenter les couples  $\Gamma$  ou  $\bar{\Gamma}$

Ce qui peut se résumer comme suit :

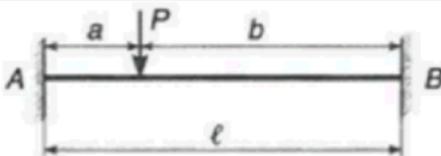
Cas 1: i est l'origine de la barre :	$\Gamma_{ij}, \bar{\Gamma}_{ij}, M_{ij}$ et $\bar{M}_{ij}$ ont le même signe	$M_{ij} = \Gamma_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}$ Avec $\bar{\Gamma}_{ij} = \bar{M}_{ij}$
Cas 2: j est l'extrémité de la barre ij :	$\Gamma_{ji}, \bar{\Gamma}_{ji}$ ont des signes opposés de ceux de $M_{ji}$ et $\bar{M}_{ji}$	$M_{ji} = -(\Gamma_{ji} + \bar{\Gamma}_{ji})$ Avec $\bar{\Gamma}_{ji} = -\bar{M}_{ji}$

L'équilibre de chaque nœud s'écrit : 
$$\sum_j (\Gamma_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}) = 0 \quad [\text{Eq. 1-1}]$$

### 1.3. Effets du chargement d'une barre sur ses moments aux extrémités (extrait formulaire pour des poutres bi-encastées)

On désigne ici par  $\bar{M}_{ij}$  les moments en encastrement parfaits pour les distinguer des moments  $M_{ij}$  agissant dans la structure. (les  $M_{ij}$  prennent en compte les effets des déformations des nœuds).

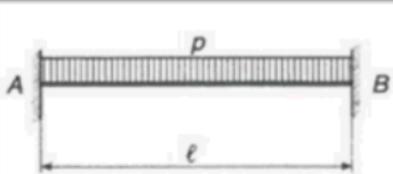
Formulaire pour la poutre bi-encastée avec charge ponctuelle



$$\bar{M}_{AB} = \frac{-Pab^2}{l^2}$$

$$\bar{M}_{BA} = \frac{-Pb.a^2}{l^2}$$

Formulaire pour la poutre bi-encastée avec charges réparties



$$\bar{M}_{AB} = \bar{M}_{BA} = \frac{-p.l^2}{12}$$

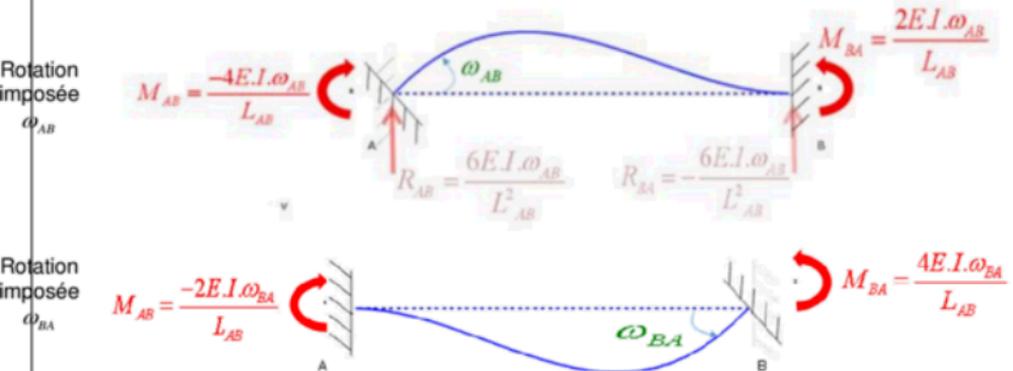
Avec les conventions de signe précédent, on déduit :

- $\bar{\Gamma}_{AB}$  : Moment interne exercé par la barre AB sur le nœud A pour une configuration d'encastrement parfait.  $\bar{\Gamma}_{AB} = \bar{M}_{AB}$
- $\bar{\Gamma}_{BA}$  : Moment interne exercé par la barre AB sur le nœud B pour une configuration d'encastrement parfait.  $\bar{\Gamma}_{BA} = -\bar{M}_{BA}$

### 1.4. Effets des déplacements aux nœuds sur les efforts internes

a. Cas d'une barre courante bi-encastree

Nous représentons successivement l'impact d'un déplacement unitaire imposé sur les efforts internes dans la barre AB et plus particulièrement les moments fléchissants notés  $M_A$  et  $M_B$  avec leur orientation suivant les conventions de signes usuelles de la RDM.



### 1.5. Expression littérale du couple exercée par la barre ij sur les nœud i et j

a. Cas d'une barre bi-encastree

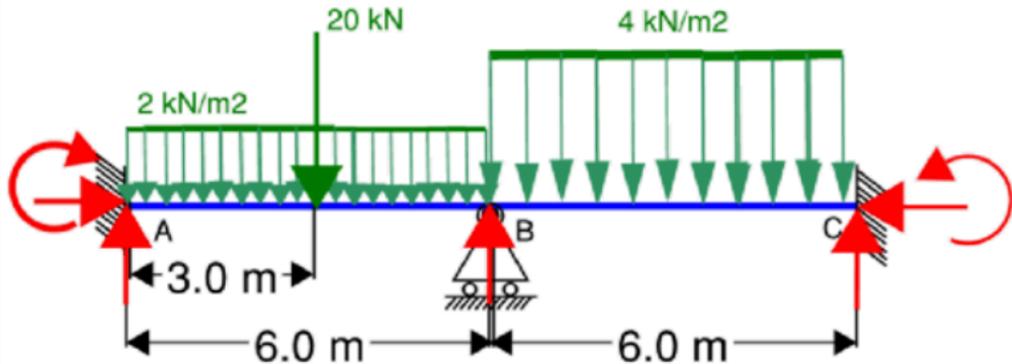
En sommant les différents cas précédents, on obtient les moments agissants sur les nœuds i et j:

$$\Gamma_{ij} = -\frac{4EI}{L_{ij}} \cdot \omega_{ij} - \frac{2EI}{L_{ij}} \cdot \omega_{ji} \quad [i \text{ désigne l'origine de la barre } ij] \quad [\text{Eq. 1-2}]$$

$$\Gamma_{ji} = -\frac{2EI}{L_{ij}} \cdot \omega_{ij} - \frac{4EI}{L_{ij}} \cdot \omega_{ji} \quad [j \text{ désigne l'extrémité de la barre } ij] \quad [\text{Eq. 1-3}]$$

## 2. EXEMPLE D'INTRODUCTION

On considère la poutre noyée suivante constituée par une largeur de dalle de 1 m reprenant une charge concentrée de 20 kN sur la travée AB.



Nous allons par la méthode des rotations déterminer successivement :

- (i) La rotation  $\omega_{BA} = \omega_{BC}$  (les autres déformations étant nulles (et bien sur  $\omega_{AB} = 0 = \omega_{CB}$ ).
- (ii) Les moments aux différents nœuds de la structure (A ;B et C).
- (iii) Les diagrammes du moment fléchissant M et de l'effort tranchant V pour la poutre continue.

L'application de [Eq. 1-2] pour la barre AB (équilibre des rotations en A) conduit à écrire :

$$\Gamma_{AB} = -\frac{2EI}{L_{AB}} \cdot \omega_{BA} \quad (\Gamma_{AB} \text{ désigne le couple qui } \overset{?}{\text{agit}} \text{ sur le nœud d'origine A sous le seul effet de la rotation } \omega_{BA} \text{ du nœud B})$$

et par ailleurs,  $M_{AB} = \Gamma_{AB} + \overline{\Gamma}_{AB}$  (A est l'origine de la barre AB d'où le même signe entre les  $M$  et  $\Gamma$ )  
Soit

$$M_{AB} = -\frac{2EI}{L_{AB}} \cdot \omega_{BA} - \frac{q_1 \cdot L_{AB}^2}{12} - \frac{F \cdot L_{AB}}{8} \quad [\text{EX } i]$$

L'application de [Eq. 1-2] et [Eq. 1-3] aux barres respectives BC et BA (équilibre des rotations en B) conduit à écrire :

$$\Gamma_{BC} = -\frac{4EI}{L_{BC}} \cdot \omega_{BC} \quad (\text{B est l'origine de la barre BC})$$

$$\text{et } \Gamma_{BA} = -\frac{4EI}{L_{AB}} \cdot \omega_{BA} \quad (\text{B est l'extrémité de la barre AB})$$

L'équilibre du nœud B s'écrit :  $(\Gamma_{BC} + \Gamma_{BA}) + (\overline{\Gamma}_{BC} + \overline{\Gamma}_{BA}) = 0$  (d'après  $\sum_j (\Gamma_{ij} + \overline{\Gamma}_{ij}) = 0$  [Eq. 1-1])

$$\text{Soit : } \frac{-4EI}{L_{BC}} \cdot \omega_{BC} - \frac{4EI}{L_{AB}} \cdot \omega_{BA} - \frac{q_2 \cdot L_{BC}^2}{12} - \frac{q_1 \cdot L_{AB}^2}{12} + \frac{P \cdot L_{AB}}{8} = 0$$

- equation dont les inconnus sont les rotations

$\omega_{BA} = \omega_{BC}$  (pas de différence de rotation de part et d'autre de B soit  $\omega_{BA} = \omega_{BC} = \omega_B$ ).

$$\Leftrightarrow \omega_{BC} \cdot (-4EI) \cdot \left( \frac{1}{L_{BC}} + \frac{1}{L_{BA}} \right) = \frac{q_2 \cdot L_{BC}^2}{12} - \frac{q_1 \cdot L_{AB}^2}{12} - \frac{P \cdot L_{AB}}{8}$$

$$\omega_{BA} = \omega_{BC} = \frac{6.75}{EI}$$

Soit finalement,

L'application de [Eq. 1-3] pour la barre BC (équilibre des rotations en C) conduit à écrire :

$$\Gamma_{CB} = -\frac{2EI}{L_{BC}} \cdot \omega_{BC} \quad \text{et par ailleurs,} \quad \overline{\Gamma}_{CB} = \frac{q_2 \cdot L_{BC}^2}{12}$$

$$M_{CB} = -(\Gamma_{CB} + \overline{\Gamma}_{CB})$$

$$\text{Soit} \quad M_{CB} = \frac{2EI}{L_{BC}} \cdot \omega_{BC} - \frac{q_2 \cdot L_{BC}^2}{12} \quad \text{[EX ii]}$$

En injectant la valeur obtenue pour  $\omega_{BA} = \omega_{BC}$  dans les [EX i] & [EX ii] on obtient les moments d'encastrement  $M_{AB}$  et  $M_{DC}$ .

Il en est de même pour le moment sur l'appui B :

$$M_{BC} = -\frac{4EI}{L_{BC}} \cdot \omega_{BC} - \frac{q_2 \cdot L_{BC}^2}{12} = M_B \quad \text{[EX iii]}$$

Soit finalement :

$$M_A = -23.25 \text{ kN.m}$$

$$M_B = -16.5 \text{ kN.m}$$

$$\text{Et } M_C = -9.75 \text{ kN.m}$$

Sur la base que  $M_A$ ,  $M_B$  et  $M_C$  sont connus, on peut déterminer les réactions en A, B et C ( $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$ ). On va commencer par déterminer la réaction au point C  $R_C$ . Pour ce faire, nous réalisons une coupure immédiatement à gauche de l'appui B en conservant la structure à droite de la coupure.

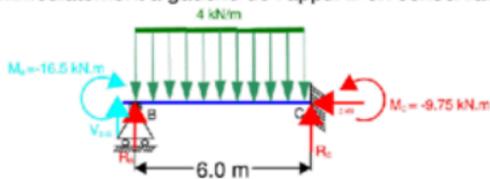
Sur la base d'une coupure immédiatement à gauche de B, l'écriture de  $\sum M_{i/B} = 0$  permet de déterminer la réaction  $R_C$ .

$$\sum M_{i/B} = 0 \Rightarrow$$

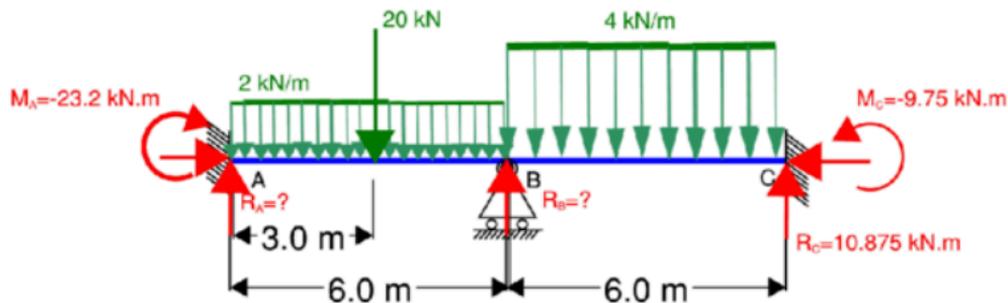
$$M_B + 4 \cdot 6 \cdot 3 - R_C \cdot 6 - M_C = 0$$

Soit :

$$R_C = \frac{-16.5 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - (-9.75)}{6} = 10.875 \text{ kN}$$



On peut trouver ensuite  $R_B$  et  $R_A$  en appliquant le principe fondamental de la statique PFS sur l'ensemble du système.



Les 2 équations du PFS s'écrivent :

$$R_A + R_C + R_C = (2 \cdot 6 + 20 + 4 \cdot 6) \text{ kN}$$

Et  $\sum M_{/A} = 0$  s'écrit  $M_A + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 9 - R_B \cdot 6 - R_C \cdot 12 - M_C = 0$

conduit finalement à

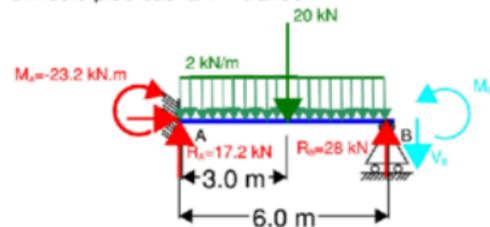
$$R_B = \frac{-23.2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 9 - 10.875 \cdot 12 + 9.75}{6} = 28 \text{ kN}$$

Puis  $R_A = 2 \cdot 6 + 20 + 4 \cdot 6 - R_C - R_C$  soit  $R_A = 2 \cdot 6 + 20 + 4 \cdot 6 - 10.875 - 28 = 17.2 \text{ kN}$

Nous pouvons enfin calculer les moments fléchissants dans chacune des travées :

Détermination des moments de la 1ère travée :

On isole plus bas la 1<sup>ère</sup> travée :



On constate simultanément:

En faisant  $\sum M_{/B} = 0$ , on constate que :

$$R_A \cdot 6 + 23.2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 20 \cdot 3 - M_B = 0$$

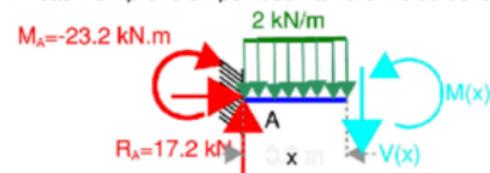
$$\text{Soit : } R_A = 2 \cdot \frac{6}{2} + \frac{20}{2} + \frac{M_B - M_A}{L_{AB}}$$

$$R_A = R_{A_{iso}} + \frac{M_B - M_A}{L_{AB}}$$

Avec :  $R_{A_{iso}} = 2 \cdot \frac{6}{2} + \frac{20}{2}$  (identique à la réaction obtenue pour la travée prise isostatique)

On procède maintenant à une coupure pour déterminer le moment fléchissant en n'importe quel point de la travée AB

1<sup>er</sup> cas : On prend un point sur la 1ère moitié de la travée :



Les efforts internes s'écrivent respectivement :

$$M(x) = R_A \cdot x + M_A - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \text{ pour } x < 3 \text{ m}$$

$$\text{Et } M(x) = R_A \cdot x + M_A - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 20(x-3) \text{ pour } x > 3 \text{ m}$$

$$\text{ou } M(x) = M_{iso}(x) + M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L_{AB}}\right) + M_B \cdot \frac{x}{L_{AB}}$$

avec :

Résolution des systèmes hyperstatiques par la méthode des rotations

$M_{iso}(x)$  : Moment fléchissant à l'abscisse  $x$  de la poutre entre A et B prise de manière isostatique avec le même chargement que la structure étudiée.

De même les expressions de  $V(x)$  s'écrivent

$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$

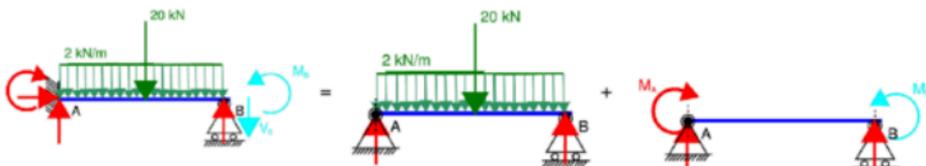
On constate également que

$$V(x) = V_{iso} + \frac{M_B - M_A}{L_{AB}}$$

Avec  $V_{iso}$  Effort tranchant à l'abscisse  $x$  de la poutre entre A et B prise de manière isostatique avec le même chargement que la structure étudiée.

Ces relations précédentes  $M(x) = M_{iso}(x) + M_A * (1 - \frac{x}{L_{AB}}) + M_B * \frac{x}{L_{AB}}$  et  $V(x) = V_{iso} + \frac{M_B - M_A}{L_{AB}}$

proviennent du fait que la travée AB se comporte de manière similaire à celle d'une travée AB prise de manière isostatique corrigée par l'application des moments respectifs  $M_A$  et  $M_B$ .



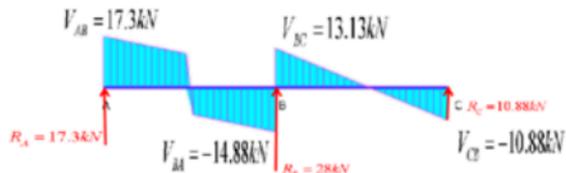
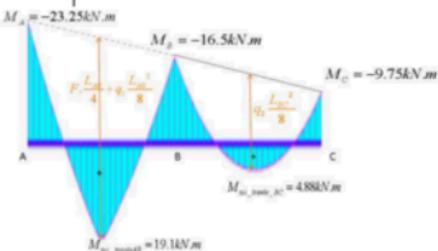
Comportement de la travée AB est identique au comportement décrit sur la travée AB prise de manière isostatique AB corrigée par les effets des moments  $M_A$  et  $M_B$ .

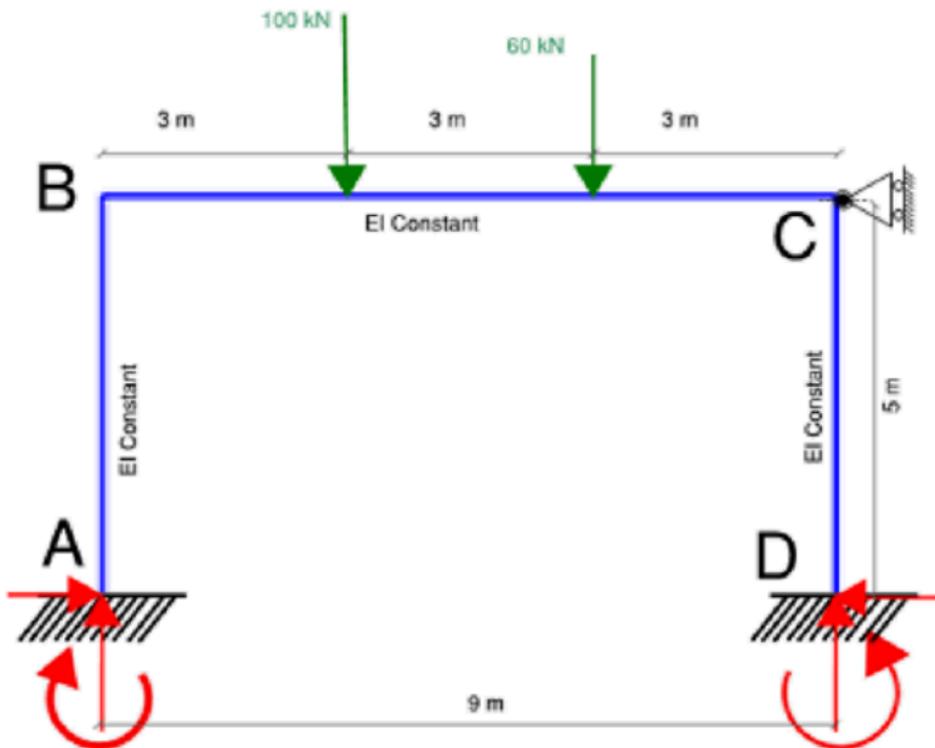
Nous traçons plus bas les courbes des efforts internes pour chacune des travées.

On constate que les expressions des efforts internes pour chaque travée peuvent s'exprimer en fonction des moments sur appuis (décomposition linéaire élastique en considérant  $M_i$  et  $M_j$  comme des actions extérieures à la travée isolée ij):

$$M_{ij} = M_{ij\_iso} + M_i \cdot (1 - \frac{x}{L_{ij}}) + M_j \cdot (\frac{x}{L_{ij}}) \text{ et } V_{ij} = V_{ij\_iso} + (M_j - M_i) \cdot (\frac{x}{L_{ij}}) = (\frac{dM}{dx})$$

On peut donc tracer les diagrammes des efforts internes associés (on trace ici les moments fléchissants orientés positivement dans le sens des fibres tendues).



**3. AUTRE EXEMPLE – CAS D'UN PORTIQUE ENCASTRE AU NIVEAU DE SES APPUIS**

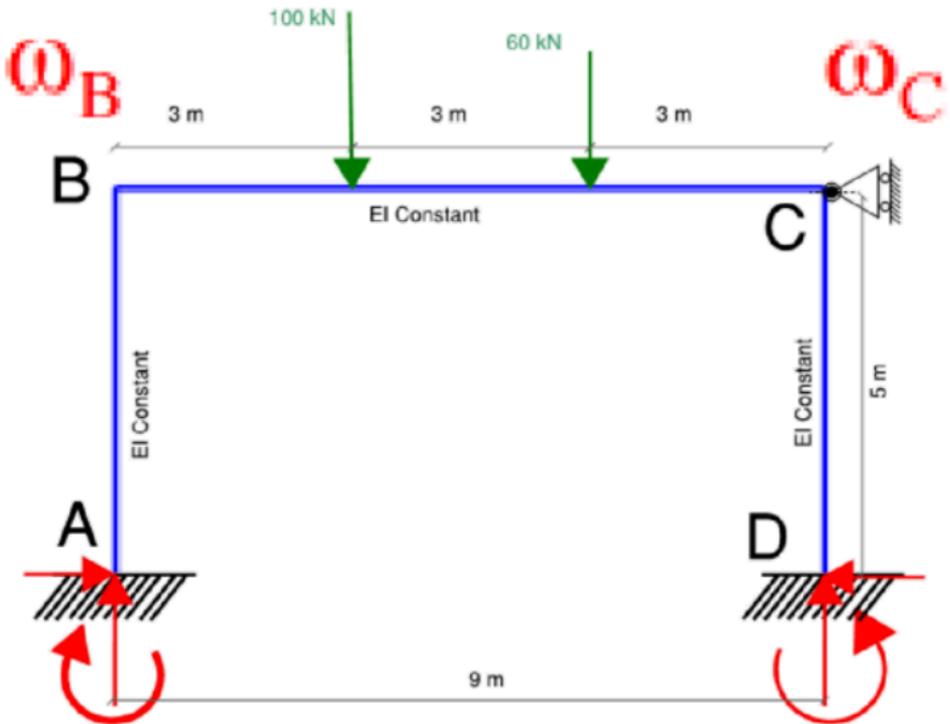
On s'intéresse à la structure ci-avant.

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure
2. En utilisant la méthode des rotations, déterminer les inconnus hyperstatiques
3. En déduire les efforts internes (M,N,V) pour chacune des barres du portique.

Solution :

1. La structure est 3 fois hyperstatique. On pourrait utiliser la méthode des forces. On utilise plus bas la méthode des rotations pour trouver les inconnus hyperstatiques (rotations ici). Il est très important de noter que la présence de l'appui en C nous permet de considérer ici que la structure est à nœud fixe et que les déplacements transverses des barres  $\Delta$  sont nuls.
2. La méthode des rotations se base sur la démarche suivante :
  - a. Détermination des déformations (ici les rotations) des nœuds intermédiaires de la structure
  - b. Obtention de l'ensemble des moments aux extrémités de chacune des barres
  - c. Sur la base des moments aux extrémités de chacune des barres, on peut déduire les efforts internes dans chacune des barres et les réactions d'appui.

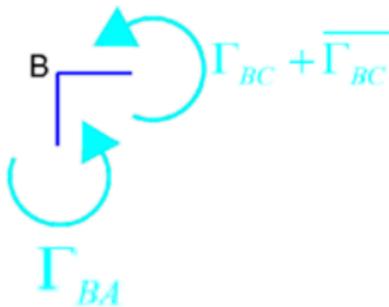
## a. Détermination des rotations des noeuds intermédiaires



Les noeuds intermédiaires B et C sont soumis respectivement aux rotations  $\omega_B$  et  $\omega_C$ .

Les rotations de ces 2 noeuds sont obtenues en écrivant les équations d'équilibre en rotation des noeuds B et C.

## Rotation du noeud B



Equation d'équilibre du noeud B en rotation:

$$\Gamma_{BA} + \Gamma_{BC} + \overline{\Gamma_{BC}} = 0 \text{ s}$$

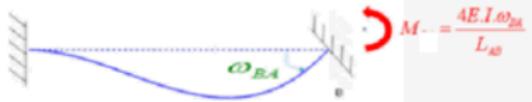
$\Gamma_{BA}$  : Couple exercé par la barre BA sur le noeud B lié aux rotations de ses noeuds d'extrémité (ici seul B est sujet à une rotation).  $\Gamma_{BA} = f(\omega_{BA})$

$$\Gamma_{BA} = -\frac{4EI}{L_{AB}} \cdot \omega_{BA} \text{ soit } \Gamma_{BA} = -0.8EI \cdot \omega_{BA}$$

(Le noeud B est le noeud d'extrémité pour la barre AB, d'où le signe - dans la formule plus haut. Le formulaire indique un moment  $\frac{4EI}{L_{AB}} \cdot \omega_{BA}$  pour le cas de charge plus bas)

## Résolution des systèmes hyperstatiques par la méthode des rotations

Rappel des conventions : Les couples exercés sur les nœuds sont pris par convention positifs pour des rotations dans le sens horaire.



$\Gamma_{BC}$  : Couple exercé par la barre BC sur le nœud B lié aux rotations de ses nœuds d'extrémité (ici les 2 nœuds B et C sont sujets à une rotation).  $\Gamma_{BC} = f(\omega_{BC}; \omega_{CB})$

$$\Gamma_{BC} = -\frac{4EI}{L_{BC}}.\omega_{BC} - \frac{2EI}{L_{BC}}.\omega_{CB} \text{ Soit}$$

$$\Gamma_{BC} = -\frac{4}{9}EI.\omega_{BC} - \frac{2}{9}EI.\omega_{CB}$$

(Le nœud B est le nœud d'origine pour la barre BC. Le formulaire indique respectivement un moment  $-\frac{4EI}{L_{BC}}.\omega_{BC}$

et  $-\frac{2EI}{L_{BC}}.\omega_{CB}$  pour les cas de charge plus bas : rotation

imposée successivement à l'origine puis à l'extrémité de la barre)

$\overline{\Gamma}_{BC}$  : Couple exercé par la barre BC sur le nœud B lié au chargement entre B et C pour une barre BC rigidement liée à ses extrémités (barre BC prise encastree)

$\overline{\Gamma}_{BC} = \overline{M}_{BC}$  pour l'application de 2 charges ponctuelles

$$\overline{\Gamma}_{BC} = \frac{-[(100kN).(3m).(6m)^2 + (60kN).(6m).(3m)^2]}{(9m)^2}$$

$$\text{Soit } \overline{\Gamma}_{BC} = -173.3kNm$$

$$\Gamma_{BA} + \Gamma_{BC} + \overline{\Gamma}_{BC} = 0 \Rightarrow -0.8EI.\omega_B - \frac{4}{9}EI.\omega_B - \frac{2}{9}EI.\omega_C - 173.3 = 0$$

## Rotation du nœud C

Equation d'équilibre du nœud C en rotation:

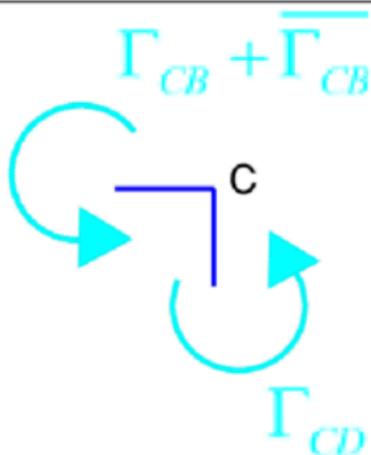
$$\Gamma_{CB} + \overline{\Gamma}_{CB} + \Gamma_{CD} = 0$$

$\Gamma_{CB}$  : Couple exercé par la barre BC sur le nœud C lié aux rotations de ses nœuds d'extrémité (ici les 2 nœuds B et C sont sujets à une rotation).  $\Gamma_{CB} = f(\omega_{BC}; \omega_{CB})$

$$\Gamma_{CB} = -\frac{4EI}{L_{BC}}.\omega_{CB} - \frac{2EI}{L_{BC}}.\omega_{BC}$$

$$\Gamma_{CB} = -\frac{4}{9}EI.\omega_{CB} - \frac{2}{9}EI.\omega_{BC}$$

## Résolution des systèmes hyperstatiques par la méthode des rotations



$\overline{\Gamma}_{CB}$  : Couple exercé par la barre BC sur le nœud C lié au chargement entre B et C pour une barre BC rigidement liée à ses extrémités (barre BC prise encastree)

$\overline{\Gamma}_{CB} = -\overline{M}_{CB}$  pour l'application de 2 charges ponctuelles

$$\overline{\Gamma}_{CB} = \frac{[(100kN).(3m)^2.(6m) + (60kN).(6m)^2.(3m)]}{(9m)^2}$$

Soit  $\overline{\Gamma}_{CB} = 146.7kN.m$

$\Gamma_{CD}$  : Couple exercé par la barre CD sur le nœud C lié aux rotations de ses nœuds d'extrémité (ici seul C est sujet à une rotation).  $\Gamma_{CD} = f(\omega_{CD})$

$$\Gamma_{CD} = -\frac{4EI}{L_{CD}}.\omega_{CD} \text{ soit } \Gamma_{CD} = -0.8EI.\omega_{CD}$$

Rappel des conventions : Les couples exercés sur les nœuds sont pris par convention positifs pour des rotations dans le sens horaire.

$$\Gamma_{CB} + \overline{\Gamma}_{CB} + \Gamma_{CD} = 0 \Rightarrow -\frac{4}{9}EI.\omega_C - \frac{2}{9}EI.\omega_B + 146.7 - 0.8EI.\omega_C = 0$$

La résolution du système de 2 équations à 2 inconnus conduit à

$$\begin{bmatrix} -0.8 - \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} - 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_B \\ \omega_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -146.7 \\ 147.4536 \end{bmatrix}$$

Soit  $\omega_B = \frac{-165.6}{EI}$  et  $\omega_C = \frac{147.5}{EI}$

On peut finalement déduire

**Moment en A  
(Encastrement)**

$$M_A = -0.4EI.\omega_{BA} = -0.4 * EI * \left(\frac{-165.6}{EI}\right)$$

$$M_A = 66.2kN.m$$

**Moment en B**

$$M_B = -\Gamma_{BA} = +0.8EI.\omega_{BA} = 0.8 * EI * \left(\frac{-165.6}{EI}\right)$$

$$M_B = -132.5kN.m$$

**Moment en C**

$$M_C = \Gamma_{CD} = -0.8 * EI * \omega_{CD} = -0.8 * EI * \left(\frac{147.5}{EI}\right)$$

$$M_C = -118kN.m$$

**Moment en D**

$$M_D = -\Gamma_{DC} = 0.4 * EI * \omega_{CD} = 0.4 * EI * \left(\frac{147.5}{EI}\right)$$

$$M_D = 59kN.m$$