Les polynômes

I – Première approche

1 – Les monômes

Abordé en fin d'année (si c'est le cas) de Seconde, puis vu en début d'année par les lycéens en Première (selon les filières), les polynômes du second degré sont un élément incontournable du programme de mathématiques.

On peut l'approcher par puissance via par :
- la fonction constante a : $f_{a0}(x) = a$ (monôme de degré 0)
- la fonction affine sans élément constant : $f_a(x) = ax$ (monôme de degré 1)
- la fonction carré seule : $f_{a2}(x) = ax^2$ (monôme de degré 2)
- la fonction cubique seule : $f_{a3}(x) = ax^3$ (monôme de degré 3)
- la fonction quartique seule : $f_{a4}(x) = ax^4$ (monôme de degré 4)
…

Donc plus le degré du monôme monte (en considérant $degré \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire un entier positif nul ou non nul), plus la puissance affectée à x est élevée. En revanche, quelque soit $a = constante$, on a dans tous les cas on aura le même degré du monôme, vu que le degré ne dépend que de la puissance affectée à la variable, ici x.


Le degré du monôme ne dépend que de la puissance affectée à la variable.

2 – Les polynômes

Un polynôme est une somme de monômes.
La forme générale d'un polynôme $P(x)$ est celle-ci :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$


Mais où sont les monômes dedans ? Voilà la réponse :

Degré	Monôme
0	$f_{a_10}(x) = a_0x^0 = a_0 * 1 = a_0$
1	$f_{a_11}(x) = a_1x^1 = a_1x$
2	$f_{a_22}(x) = a_2x^2$
3	$f_{a_33}(x) = a_3x^3$
…	…
$n-1$	$f_{a_{n-1}n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1}$
n	$f_{a_nn}(x) = a_nx^n$

A noter qu'on ne fera qu'une approche théorique.

 Niveau Terminale : Les constantes peuvent être variables.

 Niveau prépa ou sup : En réalité, un polynôme est un anneau unitaire d'une certaine forme, celle de $P(x)$ en particulier.

On considère que le degré du polynôme $P(x)$ est celle de son monôme du plus haut degré.
Par ailleurs à chaque monôme, on considère que le coefficient de degré n est celle de a_n.

Exemple :

$$P(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x^2 + 1$$

Par conséquent, $P(x)$ est de degré 6. On peut résumer les coefficients et les degrés en un tableau :

Degré	Coefficient
6	5
5	-3
2	2
0	1

 Il n'est pas forcement nécessaire que pour un polynôme de degré 6 par exemple, qu'il ait tous les monômes de degrés 0 à 6, comme vu dans l'exemple précédent. C'est-à-dire que le polynôme peut ne pas avoir de monômes de degré $1, 3, 4$ selon l'exemple. On peut aussi dire que un polynôme de degré n n'est pas obligé d'avoir tous les monômes de degrés 0 à n, avec $n \in \mathbb{N}$.

II – Niveau Première

1 – Définition d'un polynôme

Une fonction f définie dans $\Re$ est appelée fonction polynôme s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ tels que pour tout réel x, on a :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

On définit le nombre a_n le coefficient de x^n.

Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est nommé degré du polynôme P.
On note $\deg(P)$ le degré du polynôme P.

Par convention, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n = 0$, on appelle P le polynôme nul, et son degré est inexistant et non pas égal à 0. On a $\deg(P) = \emptyset$

Soit la fonction f suivante telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ définie dans $\mathbb{R}$. On considère que f est un polynôme du second degré s'il existe des réels a, b, c avec $a \neq 0$. On a $\deg(f) = 2$.

2 – Propriétés essentielles des polynômes

Deux polynômes sont égaux, si et seulement si, ils ont le même degré et les mêmes coefficients : ce principe est utiliser pour l'identification d'inconnues par l'équivalence de deux polynômes écrits différemment, mais égaux entre eux.

Le produit de deux polynômes f et g est un polynôme.

 Comme l'indique cette icône, il ne faut pas partir en fusée sur le calcul du degré du produit de ces deux polynômes. En effet, il faut que f et g ne soient pas le polynôme nul. En conséquence, on a alors $\deg(f * g) = \deg(f) + \deg(g)$ tant que f et g ne sont pas nuls.

La somme de deux polynômes f et g est un polynôme. Ce polynôme est soit :
- un polynôme nul, donc à : $\deg(f * g) = \emptyset$
- un polynôme de degré inférieur ou égal au plus grand des degrés de f et g, donc par conséquent on a : $\deg(f * g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$

On appelle racines les solutions de l'équation quelconque $f(x) = 0$.
Autrement dit, pour tout réel α, si $f(\alpha) = 0$, α est une racine de f.

On admettra que pour tout polynôme de degré n, il possède jusqu'à n racines distinctes.

3 – Résolution d'une équation du second degré

1 – Notion de discriminant

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Δ est appelé discriminant du polynôme.

On a alors trois cas selon le discriminant.

2 – Discriminant négatif

Si $\Delta < 0$, alors f n'a pas de racine.
Pas de factorisation possible.

3 – Discriminant nul

Si $\Delta = 0$, alors f admet une racine double x_0 :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{-b}{2a} \\ f(x) = a(x - x_0)^2 \end{cases}$$

4 – Discriminant positif

Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \end{cases}$$

5 – Démonstration

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.

Vu que $a \neq 0$, on peut avoir $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$ et donc on peut diviser par a.

Tentons d'obtenir $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, on a alors $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

Par conséquent, on a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.

En mettant au même dénominateur, on en déduit que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, d'où $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$

Premier cas : $\Delta < 0$.

Vu que $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc il y a pas de racines à l'équation.

Second cas : $\Delta = 0$.

Vu que $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 0 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$, l'équation a un racine double qui est $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Troisième cas : $\Delta > 0$.

Vu que $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ (passage à la racine possible), alors :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\sqrt{\Delta^2}}{4a^2}$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Leftrightarrow x = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\mp\sqrt{\Delta} - b}{2a}$$

Donc l'équation à deux racines distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

4 – Signe du polynôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a alors trois cas selon le discriminant.

2 – Discriminant négatif

Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est toujours du signe a.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

3 – Discriminant nul

Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a, sauf en la racine double x_0.

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

4 – Discriminant positif

Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ est du signe de a en dehors des deux racines distinctes x_1 et x_2, et du signe opposé de a entre les deux racines distinctes x_1 et x_2.

x	$-\infty$	$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

5 – Démonstration

Premier cas : $\Delta < 0$.
On a $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$, comme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, alors $\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ et donc la fonction f est du signe de a pour $x \in \mathbb{R}$.

Second cas : $\Delta = 0$.
On a $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, le carré est toujours positif ou nul, donc f est du signe de a pour $x \in \Re$, et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Troisième cas : $\Delta > 0$.
On a $a(x-x_1)(x-x_2)$. On peut alors réaliser le tableau de signes donnant le signe de f.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	Signe de a		Signe de a		Signe de a
$(x-x_1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-x_2)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

5 –Sens de variation d'un polynôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
On pose $f'(x) = 2ax + b$, f' étant la dérivée première de f.

On a alors immédiatement :

- pour tout $a > 0$, f est strictement décroissante jusqu'à $\frac{-b}{2a}$ (son minimum) puis strictement croissante

- pour tout $a < 0$, f est strictement croissante jusqu'à $\frac{-b}{2a}$ (son maximum) puis strictement décroissante

La dérivée en un point est le taux d'accroissement de la fonction en ce point précis. En conséquence, la fonction dérivée correspond en tout point de la fonction le taux d'accroissement de la fonction initiale. Si la fonction croit sur un intervalle, alors la fonction dérivée est positive (taux d'accroissement positif de la fonction initiale). De même, si la fonction décroit sur un intervalle, la fonction dérivée est négative car le taux d'accroissement de la fonction initiale est négative. Par ailleurs, s'il est nul en un point, alors la dérivée en ce point est nulle et par conséquent la fonction initiale est constante en ce point.

6 – Démonstration de la forme canonique

La forme canonique consiste en fait à ne faire apparaitre qu'une seule fois la variable dont il est question (en général, x).

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
Le polynôme de second degré $f(x)$ peut s'écrire de cette manière :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

En effet, en partant du début, par opérations successives :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$$
$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$
$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

On peut alors retrouver les résultats précédents.
On a de nouveau en particulier $\Delta = b^2 - 4ac$.

7 – Somme et produit des racines

 Niveau Première ou Terminale : Ne s'applique qu'aux polynômes du second degré dans notre cas.

 Niveau prépa ou sup : Il existe des relations avec la somme ou le produit des racines d'un polynôme, et ce quelque soit son degré.

1 – Somme

Soit x_1 et x_2 les racines du polynôme du second degré.
On a alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

On peut le démontrer.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b - \sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

La démonstration est similaire pour une racine double.

2 – Produit

Soit x_1 et x_2 les racines du polynôme du second degré.
On a alors : $x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$.

On peut le démontrer.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$x_1 * x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} * \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

III – Niveau Terminale

Il n'y a qu'un seul ajout aux équations du second degré en Terminale : la résolution du cas où $\Delta < 0$, via les nombres complexes.

Soit $f(x) = az^2 + bz + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Supposons que $\Delta < 0$.
Via les solutions lorsque $\Delta > 0$, on retrouve alors les résultats suivants :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

On a également la propriété suivante pour ce cas : $z_1 = \overline{z_2}$ et $\overline{z_1} = z_2$.

IV – Niveau prépa (introduction)

La liste des propriétés n'est pas développée entièrement. Il se peut donc que des éléments puissent manquer ici.

On supposera que $\mathbb{K}$ (scalaire) désigne le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1 – Polynôme à une indéterminée

1 – Définition

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite d'éléments K nulle à partir d'un certain rang.

La notation est la suivante : $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors $\exists n \in \mathbb{N}: \forall k > n, a_k = 0$, A étant le polynôme.
De manière explicite, $A = (a_0, a_1 \dots, a_n, 0,0, \dots)$, les coefficients du polynômes A sont les a.

2 – Espace vectoriel

Soit $A = (a_0, a_1 \dots, a_n, 0,0, \dots)$ et $B = (b_0, b \dots, b_n, 0,0, \dots)$ deux polynômes.
Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $\lambda A + \mu B$ est obligatoirement nulle au minimum à partir du rang $\max(p, q) + 1$ avec p le rang de A et q le rang de B.

En conséquence (si l'on considère les autres propriétés vraies, qui ne seront pas citées ici, car supposé déjà vu), on a la propriété suivante : l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On peut définir une loi de composition interne (multiplication) sur l'ensemble des polynômes.
Par exemple, le polynôme C est ici e produit de A et B, noté AB ou AxB :

$$\forall k > \mathbb{N}, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

3 – Polynôme constant et monôme

On retrouve les propriétés vues en Première :
- on appelle monôme tout polynôme de type λx^k
- on appelle polynôme constant tout polynôme du type $(\lambda, 0,0,0, \dots) = \lambda x^0$

On a alors :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

4 – Opérations sur les degrés des polynômes

1 – Définition

Soit $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, le degré de A, noté $\deg(A)$ ou $\deg A$, est défini par :

$$\deg(A) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} | a_k \neq 0\} & si\ A \neq 0 \\ -\infty & si\ A = 0 \end{cases}$$

Le terme dominant de A est le monôme du plus haut degré de A.
Contrairement au lycée, le degré du polynôme P nul est $\deg(P) = -\infty$.

2 – Opérations de base

Soient deux polynômes A et B à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a les trois propriétés suivantes :

$$\deg(A+B) \leq \max(\deg A, \deg B) \; si \; \deg A = \deg B$$
$$\deg(A+B) = \max(\deg A, \deg B) \; si \; \deg A \neq \deg B$$
$$\deg(AB) = \deg A + \deg B$$

Démontrons les deux premières propriétés.

Pour $A = B = 0$, le résultat est évident.

Supposons que A et B soient différents. On pose $n = \max(\deg A, \deg B)$.

On a donc $A + B = \sum_{k=0}^{n} \left((a_k + b_k) * x^k \right)$ ce qui prouve que $\deg(A+B) \leq n$.

Soit le terme de degré $n = a_n + b_n$. Si on a $\deg A \neq \deg B$, on a alors :

- soit $\deg A < \deg B$ ce qui induit que $a_n = 0$ et $b_n \neq 0$ et donc $a_n + b_n \neq 0$, ce qui nous prouve que $A + B$ est de degré n
- soit $\deg A > \deg B$ ce qui induit que $a_n \neq 0$ et $b_n = 0$ et donc $a_n + b_n \neq 0$, ce qui nous prouve de nouveau que $A + B$ est de degré n

Démontrons la dernière propriété.

Pour $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$, et donc $\deg(AB) = \deg(0) = -\infty$.

Par ailleurs, $n + (-\infty) = -\infty + n = -\infty$ via opération arithmétique pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Donc on a $\deg(AB) = -\infty = \deg A + \deg B$.

Supposons dans une autre hypothèse que $a_0 = \deg A$ et $b_0 = \deg B$.

Le coefficient de AB d'indice $c_0 + d_0$ vaut $a_c b_{d_0}$ est non nul. En effet, c'est le produit de deux éléments non nuls d'un corps, en conséquence on a $\deg(AB) = c_0 + d_0$.

3 – Sous-espace vectoriel

L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

L'ensemble contient le polynôme nul. Il est également stable par combinaisons linéaires. En effet, la combinaison linéaire de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n est obligatoirement de degré inférieur ou égal à n.

4 – Anneau intègre

Si l'on se place dans l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, x)$, on a $\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \; ou \; B = 0)$. ON dit que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, x)$ est intègre.

Démonstration

Vu que $\deg(AB) = \deg A + \deg B$, cela implique que $(A \neq 0 \; et \; B \neq 0) \Rightarrow AB \neq 0$.

5 – Eléments inversibles

Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0.

Démonstration

Dans le premier sens : si A est un polynôme de degré 0, qui est donc une constante non nulle, le polynôme constant de l'inverse de la constante nulle est l'inverse de A.
Dans le second sens, si A est un polynôme inversible, il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $AB = 1$, en conséquence A et B ne peuvent pas être nuls, et donc $0 = \deg(1) = \deg(AB) = \deg A + \deg B$, et vu que $\deg A \in \mathbb{N}$ et $\deg B \in \mathbb{N}$, alors $\deg A = 0$.

2 – Racines d'un polynôme

1 – Racines

On suppose que A soit un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine du polynôme A si $A(\alpha) = 0$.
Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine de A, si et seulement si, $(x - \alpha)$ divise A.

Démonstration

En utilisant les propriétés de factorisation, on a bien $(x - \alpha)$ divise A.
Sinon, on peut démontrer que $A(\alpha)$, reste de la division euclidienne de A par $(x - \alpha)$, est nul.

On peut généraliser ce cas : si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A, alors A est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(x - \alpha_i)$.

Démonstration

Faisons une démonstration par récurrence.
Pour $p = 1$, le résultat précédent affirme ce cas.
Supposons vrai le résultat pour p. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les $p + 1$ racines distinctes d'un polynôme A quelconque. Il existerait un polynôme $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = P_1 \prod_{i=1}^{p}(x - \alpha_i)$.
Comme α_0 est racine de A, on a $P_1(\alpha_0) \prod_{i=1}^{p}(x - \alpha_i) = 0$.
En conséquence, on a $P_1(\alpha_0) = 0$ vu que $\prod_{i=1}^{p}(\alpha_0 - \alpha_i) \neq 0$.
On peut donc affirmer l'existence d'un polynôme P_2 tel que $P_1 = (x - \alpha_0) * P_2$,.
D'où $A = P_2 \prod_{i=0}^{p}(x - \alpha_i)$.

La conséquence de cette propriété est la suivante : tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.