Probabilités

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- *Continuité croissante*

$$(A_n) \nearrow \Rightarrow \lim_n P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

- *Continuité décroissante*

$$(A_n) \searrow \Rightarrow \lim_n P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

- $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

- *Probabilités conditionnelles*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- *Probabilités composées*

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- (A_n) *un système complet d'évènements*
  - *Probabilités totales*

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) \cdot P(A_n)$$

  - *Bayes*

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) \cdot P(A_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) \cdot P(A_n)}$$

- *Fonction de répartition*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- *Couple de Variables Aléatoires discrètes*

$$X, Y \textit{ indépendantes} \Rightarrow P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(X \in B)$$

- *Espérance mathématique*

E est linéaire

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geq n)$$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot P(X = x_n)$$

$$\boxed{E(X) \geq \alpha \cdot P(X \geq \alpha) \qquad (Markov)}$$

$$\sum f(x_n) \cdot P(X = x_n) \quad cv\ abs \Leftrightarrow E\big(f(X)\big)\ finie \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \cdot P(X = x_n) \right)$$

- *Variance*

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\boxed{P(|x - E(X)| \geq t) \;\leq\; \frac{V(X)}{t^2} \qquad (Bienaymé - Tchebychev)}$$

- *Ecart-Type*

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

- *Covariance*

$$Cov(X,Y) = E\big[\big(X - E(X)\big) \cdot \big(Y - E(Y)\big)\big]$$

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot Cov(X,Y)$$

- *Coefficient de corrélation*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1 \qquad (Cauchy - Schwarz)$$

- *Fonction Génératrice*

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) \cdot t^n$$

$$G'_X(1) = E(X) \qquad\qquad G''_X(1) = E\left(X^2\right) - E(X)$$

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$$

- *Loi uniforme*

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

- *Loi de Bernoulli*

$$P(X = 1) = p \qquad\qquad P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p \cdot (1 - p)$$

- *Loi binomiale*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

- *Loi Géométrique*

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

- *Loi de Poisson*

$$P(X = n) = e^{-\lambda} - \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$