Intégration

1. Intégration sur un segment

✓ ***Permutations classiques***

$$\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b-a)\cdot\|f\|_{\infty}^{[a,b]}$$

$$\overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \bar{f}$$

✓ ***Permutation limite – intégrale***

$$\left.\begin{array}{c}\forall n,\ f_n\ cont \\ (f_n)\ CU\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f\ cont \\ \lim\limits_n \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f\end{array}\right.$$

✓ ***Dérivation 1ère (suites)***

$$\left.\begin{array}{c}\forall n,\ f_n\ C^k \\ (f_n)\ CS \\ (f_n')\ CU\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\lim_n f_n\right)' = \lim_n f_n'$$

✓ ***Dérivation pème (suites)***

$$\left.\begin{array}{c}\forall n,\ f_n\ C^k \\ (f_n)\ CS \\ \forall k < p, \left(f_n^{(k)}\right)\ CS \\ \left(f_n^{(p)}\right)\ CU\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\lim_n f_n\right)^{(p)} = \lim_n f_n^{(p)}$$

✓ ***Permutation série – intégrale***

$$\sum f_n\ CU \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

✓ ***Dérivation 1ère (séries)***

$$\left.\begin{array}{c}\sum f_n\ CS \\ \sum f_n'\ CU\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

✓ ***Dérivation pème (séries)***

$$\left.\begin{array}{c}\sum f_n\ CS \\ \sum f_n^{(k)}\ CS \\ \sum f_n^{(p)}\ CU\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$$

✓ *Dérivation d'intégrale*

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' = v'(x)\cdot f\big(v(x)\big) - u'(x)\cdot f\big(u(x)\big)$$

✓ *Accroissements finis*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur } [a,b] \\ f \text{ dériv sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

✓ *Rolle*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur } [a,b] \\ f \text{ dériv sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c, f'(c) = 0$$

✓ *Inégalité des Accroissements Finis*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur } [a,b] \\ f \text{ dériv sur }]a,b[\\ \exists\lambda, \forall t, \|f(t)\| \leq \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(b)-f(a)\| \leq \lambda\cdot(b-a)$$

✓ *Taylor*

$$T_{n,a}(f)(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!}\cdot f^{(p)}(a)$$

$$R_{n,a}(f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(t)\cdot dt$$

$$f(x) = T_{n,a}(f)(x) + R_{n,a}(f)(x)$$

✓ *Taylor-Lagrange*

$$\|R_{n,a}(f)(b)\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \sup_{[a,b]}\|f^{(n+1)}(t)\|$$

✓ *Taylor-Young*

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-x_0)^p}{p!}\cdot f^{(p)}(x_0) + o(x-x_0)^n$$

2. Intégrales généralisées

- *Riemann*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{1-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

- *Ln*

$$\int_0^1 \ln(t)\ dt = -1$$

- *Exponentielle*

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt = \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$$

- Intégrabilité

$$f \text{ intégrable} \Leftrightarrow \int_I |f| \leq 1$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur } [a, +\infty[\\ \lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha \cdot f(t) = 0, \alpha > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ integrable sur } [a, +\infty[$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur }]0, b] \\ \lim\limits_{t\to0^+} t^\alpha \cdot f(t) = 0, \alpha < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ integrable sur }]0, b]$$

- *Comparaison SATP – Intégrale*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur } \mathbb{R}_+ \\ f \text{ décroissante} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sum f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow f \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+$$

- *Convergence dominée*

$$\left.\begin{array}{c} \forall n, f_n \text{ cont} \\ (f_n)\ CS \text{ vers } f \\ f \text{ cont} \\ \exists \varphi \text{ cont}, \forall n, |f_n| \leq \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall n, f_n \text{ integ} \\ f \text{ integ} \\ \lim\limits_n \int_I f_n = \int_I \lim\limits_n f_n \end{array}\right.$$

- *Intégration terme à terme*

$$\left.\begin{array}{c} \forall n, f_n \text{ cont, integ} \\ \sum f_n\ CS \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ cont} \\ \sum \int_I |f_n| \text{ cv} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ integ} \\ \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array}\right.$$

3. Intégrales dépendant d'un paramètre

- ✓ *Continuité*

$$\left.\begin{array}{c}\forall t \in I, f(x,t) \text{ cont sur } A \\ \forall x \in A, f(x,t) \in CM(I) \\ \exists \varphi \in CM, \text{dominante}, \text{integ sur } I\end{array}\right\} \Rightarrow F: \left|\begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_I f(x,t)dt \end{array}\right. \text{ est def, cont sur } A$$

- ✓ *Permutation limite intégrale*

$$\left.\begin{array}{c}\forall t \in I, f(x,t) \text{ cont sur } A \\ \forall x \in A, f(x,t) \in CM(I) \\ \exists \varphi \in CM, \text{dominante}, \text{integ sur } I \\ \exists \rho \in C(I), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t) = \rho(t)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho \text{ integ sur } I \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \int_I f(x,t)dt = \int_I \lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t)dt = \int_I \rho(t)dt \end{array}\right.$$

- ✓ *Leibniz*

$$\left.\begin{array}{c}\forall t \in I, f(x,t) \text{ cont sur } A \\ \forall x \in A, f(x,t) \in CM(I) \\ \dfrac{\delta f}{\delta x} \text{ vérif hyp de thm de cont}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(x) = \int_I f(x,t)dt \text{ est } C^1 \text{ sur } A \\ \forall x \in A, F'(x) = \int_I \dfrac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt \end{array}\right.$$