Normes

✓ *Définition*

$$Séparation : N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

$$Inégalité\ triangulaire : N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

$$Homogénéité : N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$$

✓ *Inégalité de Minkowski*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x+y)$$

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$$

✓ *Cauchy-Schwartz*

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \cdot \sqrt{(y|y)}$$

$$|(x|y)| = \sqrt{(x|x)} \cdot \sqrt{(y|y)} \Leftrightarrow (x,y) \text{ liés}$$

✓ *Normes équivalentes*

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \quad \alpha \cdot N \leq N' \leq \beta \cdot N, \quad \frac{1}{\beta} \cdot N' \leq N \leq \frac{1}{\alpha} \cdot N'$$

✓ $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$

$$N_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$N_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$N_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k|)$$

✓ $C^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$

$N_1 : f \mapsto \int_a^b |f|$ *(convergence en moyenne)*

$N_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f|^2}$ *(convergence quadratique)*

$N_\infty : f \mapsto \max_{x \in [a,b]} (|f(x)|)$ *(convergence uniforme)*