Etude 1

Polynôme d'interpolation de Lagrange

1. *Polynôme de Lagrange*

$(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \qquad 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}$

$(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

✓ *On vérifie que P soit dans le noyau de u*

$$P \in Ker\, u \Leftrightarrow N = (X - a_0) \dots (X - a_n) \text{ divise } P$$

$$Ker\, u = (N) \quad et \quad \deg N = n + 1$$

✓ *Théorème de la division euclidienne par N*

$$\mathbb{K}[X] = (N) \oplus \mathbb{K}_n[X]$$

$$= Ker\, u \oplus \mathbb{K}_n[X]$$

✓ *Théorème fondamental*

$$\tilde{u} : \left| \begin{array}{r} \mathbb{K}_n[X] \to Im\, u \\ P \mapsto u(P) \end{array} \right. \qquad est\ un\ isomorphisme$$

$$Donc \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1 = \dim Im\, u$$

✓ *On en déduit une relation entre $Im\, u$ et $\mathbb{K}^{n+1}$*

$$Im\, u \ \ sev\ de\ \mathbb{K}^{n+1}$$

$$\dim Im\, u = n + 1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$$

$$Donc\ Im\, u = \mathbb{K}^{(n+1)}$$

$$\boxed{Donc \quad \exists! \, L \in \mathbb{K}_n[X], \forall k \in [\![0, n]\!], \quad L(a_k) = L(b_k)}$$

2. *Polynômes de Lagrange associés*

$(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \qquad 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}$

$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$Alors \quad \forall j \in [\![0, n]\!], \exists! \, L_j \in \mathbb{K}_n[X], \forall i \in [\![0, n]\!], \quad \boxed{L_j(a_i) = \delta_{ij}}$

3. Base des Polynômes de Lagrange

$\mathcal{F} = (L_0, \dots, L_n)$ *famille de* $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{K}_n[X]$

$\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$

✓ *On montre que la famille est libre*

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot L_k = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot L_k(a_i) = 0$$

✓ *On en déduit que c'est une base*

$\mathcal{F}$ *est une famille libre de* $\mathbb{K}_n[X]$

$card(\mathcal{F}) = n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$

Donc $\mathcal{F}$ *est une Base de* $\mathbb{K}_n[X]$ *dite* $\boxed{\textit{Base des polynômes de Lagrange}}$

4. Explicitation de L

$$\forall j \in [\![0, n]\!], L_j = \frac{(X - a_0) \dots (X - a_{j-1})(X - a_{j+1}) \dots (X - a_n)}{(a_j - a_0) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_n)}$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{(X - a_k)}{(a_j - a_k)}$$

$$\forall L \in \mathbb{K}_n[X], \boxed{L = \sum_{k=0}^{n} L(a_k) \cdot L_k}$$

$$\text{Donc } \boxed{L(a_i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot L_k(a_i) = \lambda_i}$$

5. Matrice de Van Der Monde

$$\tilde{u} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1} \\ \quad P \mapsto (P(a_0), \dots P(a_n)) \end{array} \right. \quad \textit{linéaire}$$

$B_c = \{X^0, X, X^2, \dots, X^n\}$ $\qquad$ $B_c' = \{L_0, L_1, \dots, L_n\} =$ *base des polynômes de Lagrange*

$$Mat_{B_c, B_c'}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}_{n+1}$$

$$= \textit{Van Der Monde } (a_0, \dots, a_n)$$

$$= V(a_0, \dots, a_n)$$