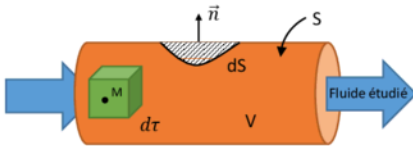


Mécanique des Fluides

1. Statique des fluides

$$\mu(M) = \frac{\delta m}{\delta \tau}(M) \quad \text{au voisinage du point } M$$



✓ Force volumique (Densité volumique de force) en M

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \frac{\delta \overrightarrow{F_v}(M)}{d\tau}$$

$$\overrightarrow{\varphi_{pes}}(M) = \mu(M) \cdot \vec{g}(M)$$

$$\overrightarrow{\varphi_{elec}}(M) = \rho(M) \cdot \vec{E}(M)$$

✓ Force de pression

$$\delta \overrightarrow{F_{pression}}(M) = -P(M) \cdot d\vec{S}$$

$$\delta \overrightarrow{F_{pression}} = -\overrightarrow{grad}(P) \cdot d\tau$$

$$\overrightarrow{\varphi_{pression}} = -\overrightarrow{grad}(P)$$

✓ Relation fondamentale de la statique des fluides

$$\overrightarrow{grad}(P) = \sum \overrightarrow{\varphi_i}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{grad}(P) = \mu \cdot \vec{g} \\ \frac{\delta P}{\delta z} = -\mu \cdot g \end{array} \right\} \text{ pesanteur seule}$$

✓ Poussée d'Archimède

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -m^* \cdot \vec{g}$$

m^* la masse de fluide déplacé

2. Débit et lois de conservation

✓ Lignes de courant

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

✓ Vecteur densité de courant de masse

$$\overrightarrow{J_{masse}}(N_1, t) = \mu(N_1, t) \cdot \vec{v}(N_1, t)$$

$$\frac{\delta m}{dt} = \overrightarrow{J_{masse}} \cdot \overrightarrow{dS}$$

✓ Débit massique

$$D_m = \iint_S \overrightarrow{J_{masse}} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \mu \cdot \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

✓ Conservation de la masse

$$\frac{dm}{dt} = - \oiint_S \overrightarrow{J_{masse}} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\text{div}(\overrightarrow{J_m})$$

✓ Débit volumique

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

✓ Ecoulement stationnaire

Lignes de courant = Trajectoires

$$\text{div}(\mu \cdot \vec{v}) = 0$$

$$\oiint_S \mu \cdot \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

✓ Ecoulement homogène et incompressible

$$\mu = \text{cste}$$

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

3. Actions de contact sur un fluide

✓ Force normale de pression

$$\overrightarrow{\delta F_{\text{pression}}}(M, t) = -P(N, t) \cdot \overrightarrow{dS}(N)$$

$$\overrightarrow{\delta F_{\text{pression}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot d\tau$$

✓ Force surfacique de viscosité (de cisaillement)

$$\overrightarrow{\delta F_{x^- \rightarrow x^+}} = -\eta \cdot \frac{\delta v_z}{\delta x} \cdot \overrightarrow{U_z} = -\overrightarrow{\delta F_{x^+ \rightarrow x^-}}$$

η : viscosité dynamique

$$[\eta] = \text{Pl (Poisuille)} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

✓ Profil de vitesses

$$\text{Couette plan : } \vec{v} = \frac{v_0}{a} \cdot x \cdot \overrightarrow{U_z}$$

$$\text{Poiseuille plan : } \vec{v} = \frac{(P_1 - P_2)(a^2 - x^2)}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot \overrightarrow{U_z}$$

$$\text{Poiseuille cylindrique : } \vec{v} = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot \overrightarrow{U_z}$$

4. Ecoulements homogènes et incompressibles

➤ Dans une conduite

✓ Vitesse débitante

$$U = \frac{|D_v|}{S_d} = \frac{|\iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}|}{S_d}$$

S_d la section droite de la conduite

✓ Diffusion

$$\nu = \frac{\eta}{\mu} \quad \text{viscosité cinématique}$$

$$\overrightarrow{J_{diff}} = -\nu \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\mu \cdot v_z)$$

$$\nu \cdot \frac{\delta^2(\mu \cdot v_z)}{\delta x^2} = \frac{\delta(\mu \cdot v_z)}{\delta t}$$

$$t_{diff} = \frac{L^2}{\nu}$$

✓ Convection

$$\overrightarrow{J_{conv}} = \mu \cdot v_z^2 \cdot \overrightarrow{u_z} = (\mu \cdot v_z) \cdot \vec{v}$$

$$t_{conv} = \frac{L}{U}$$

✓ Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{j_{conv}}{j_{diff}} = \frac{t_{diff}}{t_{conv}} = \frac{U \cdot L}{\nu}$$

$Re \leq 2000 \rightarrow$ écoulement laminaire

$Re \geq 2000 \rightarrow$ écoulement turbulent

$$Re = \frac{2\mu \cdot U \cdot R}{\eta} \quad \text{dans une conduite}$$

Ordre de grandeur réel $\simeq 10^6$

✓ Ecoulement laminaire

$$\text{Hagen - Poiseuille : } D_v = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot L} (P_1 - P_2)$$

✓ Analogie

$$\Delta V = R \cdot I \Leftrightarrow \Delta P = R_{hydr} \cdot D_v$$

$$\mathcal{P} = R \cdot I^2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_{hydr} = R_{hydr} \cdot D_v^2$$

➤ Autour d'un obstacle

✓ Epaisseur de la couche limite

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\nu \cdot t}$$

$$t = \frac{L}{U}$$

✓ Force de trainée

○ Sphère

$$\|\overrightarrow{F_{trainée}}\| = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v_{s/fluide}^2 \cdot C_x$$

C_x coefficient de trainée

Force opposée à la vitesse

○ Aile d'avion

$$Finesse = \frac{C_z}{C_x} = \frac{F_{portance}}{F_{trainée}}$$

$$F_{trainée} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v^2 \cdot S \cdot C_x$$

$$F_{portance} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v^2 \cdot S \cdot C_z$$

5. Bilans macroscopiques

✓ Bilan d'énergie (écoulement stationnaire)

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q$$

✓ Bilan d'entropie

$$\Delta S = S_e + S_c$$

✓ Ecoulement Parfait

$$h = u + \frac{P}{\mu}$$

$$u = \frac{U}{m} \text{ energie interne massique}$$

✓ Relation de Bernoulli

$$P + \mu \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v^2 = K_{\text{ligne de courant}}$$

✓ Perte de charge

$$charge = \frac{P_{tot}}{\mu g} = \frac{P}{\mu g} + z + \frac{v^2}{2 g}$$

$$\frac{\Delta P_{tot,reg}}{\mu g} = \left(\frac{P_1}{\mu g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2 g} \right) - \left(\frac{P_2}{\mu g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2 g} \right)$$