GEII 1ère année

Formulaire de trigonométrie

1 Formule fondamentale :

$$(1) \quad \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

2 Formules d'addition :

(2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
(moyen mnémotechnique : coco moins sisi)
(3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
(moyen mnémotechnique : sico plus cosi)

Remarque 1 *: En théorie, il est possible de retrouver toutes les formules de trigo du monde si on connaît ces 2 formules d'addition ainsi que la formule fondamentale... néanmoins il est vivement conseillé d'apprendre les autres, histoire de gagner du temps pendant les contrôles.*

(4) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
(5) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
(6) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
(7) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

3 Formules de duplication :

(8) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
(9) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
(10) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$
(11) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
(12) $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

4 Formules de triplication :

(13) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
(14) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

5 Formules de linéarisation :

(15) $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
(16) $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

6 Transformations de produits en sommes :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right] \tag{17}$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right] \tag{18}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right] \tag{19}$$

7 Transformations de sommes en produits :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{20}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{21}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{22}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \tag{23}$$

8 Valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

9 Transformations élémentaires :

a) Passage de x à $-x$: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, $\tan(-x)=-\tan x$
(la fonction cos est paire, tandis que sin et tan sont impaires).
b) Passage de x à $\pi-x$: $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$
c) Passage de x à $\pi+x$: $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\tan(\pi+x)=\tan x$
(en particulier la fonction tan est périodique de période π).
d) Passage de x à $\frac{\pi}{2}-x$: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$
e) Passage de x à $\frac{\pi}{2}+x$: $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$

10 Formules de passage à l'angle moitié (utiles en intégration)

Dans certaines situations on est amenés à poser $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On dispose alors des formules suivantes pour exprimer $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de t :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

11 Nombres complexes

11.1 Formule de base :

$$i^2 = -1$$

11.2 Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

11.3 Forme trigonométrique :

Si $z = a + ib$ avec a et b réels, on a les formules

$$\overline{z} = a - ib$$
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\rho}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

11.4 Formule de Moivre :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

11.5 Exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

11.6 Formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$