Exemplo da resolução do Problema 7 (TPC)

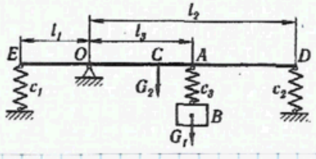

Figura 1.

Para o sistema ilustrado achar as frequências principais e os coeficientes de forma.
Considerar a barra ED homogênea.

$l_1 = 0{,}2\,m$, $l_2 = 0{,}6\,m$, $l_3 = 0{,}3\,m$;
$m_1 = 0{,}5\,kg$, $m_{ED} = m_2 = 3\,kg$;
$c_1 = 60\,N/cm$, $c_2 = 40\,N/cm$, $c_3 = 40\,N/cm$.
A Figura 1 mostra a posição de equilíbrio do sistema.

Resolução. O sistema tem 2 graus de liberdade.

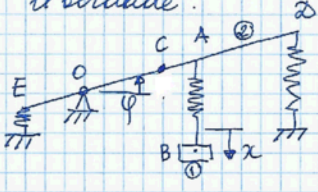

Figura 2

As coordenadas generalizadas são:
φ – o ângulo de rotação da barra ED
x – deslocamento do ponto B a partir da posição de equilíbrio; o sentido de crescimento das coordenadas está indicado na Fig. 2.
Uma vez que a barra ED é uniforme, o seu centro de massa fica no meio e

$$|OC| = |EC| - |OE| = \frac{l_1 + l_2}{2} - l_1 = \frac{l_2 - l_1}{2} \quad (1)$$

1. <u>Energia cinética</u>

$$T = T_1 + T_2.$$

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} \text{ - energia cinética do bloco } B$$

$$T_2 = \frac{J_0 \omega^2}{2} \text{ - energia cinética da barra } ED$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$J_0 = J_{0_{EO}} + J_{0_{DO}} = \frac{m_{EO} l_1^2}{3} + \frac{m_{DO} l_2^2}{3}$$

onde $m_{EO} = \frac{m_2}{l_1 + l_2} l_1$ e $m_{DO} = \frac{m_2}{l_1 + l_2} l_2$

Então

$$J_0 = \frac{m_2}{3(l_1 + l_2)}(l_1^3 + l_2^3) = \frac{m_2}{3} \frac{(l_1 + l_2)(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2)}{l_1 + l_2}$$

$$J_0 = m_2 \frac{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}{3} = 0{,}28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{6}(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2)\dot{\varphi}^2$$

e os coeficientes de inércia sao

$$a_{11} = m_1, \quad a_{22} = \frac{m_2}{3}(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2), \quad a_{12} = 0. \quad (2)$$

2. <u>Energia potencial</u> tem parte gravítica e parte elástica:

$$V = V_g + V_e.$$

Energia potencial <u>gravítica</u>:

$$V_g = V_{g_1} + V_{g_2}$$

Corpo 1:

$$V_{g_1} = m_1 g h_B + \text{const} = \underline{-m_1 g x + \text{const}}.$$

Corpo 2:

$$V_{g_2} = m_2 g h_C + \text{const} = m_2 g |OC| \varphi + \text{const} =$$
$$= \underline{m_2 g \frac{l_2 - l_1}{2} \varphi + \text{const}}.$$

Energia potencial <u>elástica</u>:

$$V_e = V_{e_1} + V_{e_2} + V_{e_3} =$$
$$= \frac{c_1}{2}(\xi_{10} - l_1\varphi)^2 + \frac{c_2}{2}(\xi_{20} + l_2\varphi)^2 +$$
$$+ \frac{c_3}{2}(\xi_{30} + l_3\varphi + x)^2 + \text{const},$$

onde ξ_{10}, ξ_{20} e ξ_{30} são deformações das respectivas molas em equilíbrio.

Então:

$$V = -m_1 g x + \frac{l_2 - l_1}{2} m_2 g \varphi + \frac{c_1}{2}(\xi_{10} - l_1\varphi)^2 +$$
$$+ \frac{c_2}{2}(\xi_{20} + l_2\varphi)^2 + \frac{c_3}{2}(\xi_{30} + l_3\varphi + x)^2 + \text{const} =$$
$$= \frac{\varphi^2}{2}(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2) + \frac{x^2}{2} \cdot c_3 + c_3 l_3 \varphi x +$$
$$+ \left[\frac{(l_2 - l_1) m_2 g}{2} - c_1 \xi_{10} l_1 + c_2 l_2 \xi_{20} + c_3 l_3 \xi_{30}\right]\varphi +$$
$$+ \left[-m_1 g + c_3 \xi_{30}\right] x + \text{const} =$$
$$= \frac{c_{11} x^2}{2} + \frac{c_{22}\varphi^2}{2} + c_{12} x\varphi + a\varphi + bx + \text{const}.$$

onde $c_{11} = c_3$, $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2$, $c_{12} = c_3 l_3$ (3)

e os coeficientes a e b são nulos porque em equilíbrio $\varphi=0, x=0$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} = \left(c_{11}x + c_{12}\varphi + b\right)\Big|_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} = b = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\Big|_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} = \left(c_{22}\varphi + c_{12}x + a\right)\Big|_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} = a = 0.$$

Portanto

$$V = \frac{c_{11}x^2}{2} + \frac{c_{22}\varphi^2}{2} + c_{12}x\varphi + \text{const.}$$

As equações de Lagrange são

$$a_{11}\ddot{x} + c_{11}x + c_{12}\varphi = 0$$
$$c_{12}x + a_{22}\ddot{\varphi} + c_{22}\varphi = 0$$

onde a_{ij} são definidas por (2) e c_{ij} por (3).

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - c_{12}^2 = 0 \qquad (4)$$

Aqui $a_{11} = m_1 = 0{,}5$ kg; $c_{11} = c_3 = 4000$ N/m, $c_{12} = c_3 l_3 = 1200$ N, $a_{22} = \frac{m_2}{3}(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2) = 0{,}28$ kg·m^2; $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 2040$ N·m.

Equação (4) é bi-quadrática em relação a ω:

$$a_{11} a_{22} \omega^4 - (a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11})\omega^2 + c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Resolvendo-o, obtemos

$$\omega_1 = 66,4 \ s^{-1}, \quad \omega_2 = 104 \, s^{-1}.$$

Os respectivos coeficientes da forma:

$$\beta_1 = - \frac{-a_{11}\omega_1^2 + c_{11}}{c_{12}} = -1,49 \ \text{rad}/\text{m}$$

$$\beta_2 = - \frac{-a_{11}\omega_2^2 + c_{11}}{c_{12}} = 1,2 \ \text{rad}/\text{m}$$

A solução geral das equações de movimento é

$$x(t) = A_1 \operatorname{sen}(66,4\,t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen}(104t + \psi_2)$$

$$\varphi(t) = -1,49 A_1 \operatorname{sen}(66,4\,t + \psi_1) + 1,2 A_2 \operatorname{sen}(104t + \psi_2)$$

Aqui A_1, A_2, ψ_1 e ψ_2 são constantes de integração que se pode calcular sabendo as condições iniciais do movimento.