Chap 1 : Intro, objectifs et applications de la MMC.

→ comportement du solide continu et déformable

→ étude de la déformat° du solide lorsqu'il est soumis à des contraintes (compression, torsion, traction...). et par csq. sa résistance.

* MMC : théorique : "Analytique"
  ↳ 3D

Méthod des éléments finis : numérique ~ 1980.

Hypothèses fondamentales de la MMC :

1 – continuité de la matière

$$df = \text{grad}\, f \cdot dl$$

2 – déformation du milieu

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$ → tenseur du 2ème ordre

3 – contrainte du milieu

$$\sigma = \frac{dF}{dS} \quad \begin{matrix} \to N \\ \to m^2 \end{matrix}$$ → tenseur du 2ème ordre.

pression : $P = \frac{F}{S}$ ($N.m^{-2}$)

4 - matériaux et loi de comportement

$$\sigma = f(\varepsilon).$$

Comment résoudre le problème en MMC ?

1) système d'équation d'équilibre : - Σ forces sur $x = 0$
- Σ forces sur $y = 0$
- ... $z = 0$.

\+

conditions aux limites.

2) Déplacements : "$\vec{u}$" (vecteur)

3) Déformation : "ε" (tenseur).

4) Loi de comportement : "$\sigma - \varepsilon$"

5) contraintes : "σ" tenseur.

6) critères : $\sigma < \sigma_a$ = contrainte admissible.

Repère :

Tenseurs: $\vec{a} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$, $\vec{b} = b_j \vec{e_j}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underbrace{a_i \vec{e_i}, \quad i = 1,2,3}_{\text{sommat° de Einstein}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e_i} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$$

$$\underset{\text{ligne}}{\{a^\wedge\}} \underset{\text{colone.}}{\{b\}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = (a_1 \; a_2 \; a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{colone}}{\{a\}} \underset{\text{ligne.}}{\{b^\wedge\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_1 b_3 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$= \overline{\overline{A}}$ → tenseur du 2ème ordre.

$\Rightarrow A_{ij} \quad i,j = 1,2,3$

i → l, j → c

indice
- "sommation" → 2 indices identiques
- "libre" → 1 indice seul.

$\vec{a}.\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ produit scalaire.

$\vec{a} \wedge \vec{b} =$ produit vectoriel.

$\vec{a} \otimes \vec{b}$ = produit tensoriel.

$\hookrightarrow \; a_i \vec{e_i} \otimes \underline{b_j \vec{e_j}} = a_i b_j \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$ $\quad \Delta\ \vec{c} = c_i \vec{e_i}$

$\cancel{b_i \vec{e_i}}$

$= a_i b_j \; \vec{e_i} \vec{e_j}$ $\quad \Delta\ a_i b_j c_k \vec{e_i} \vec{e_j} \vec{e_k}.$

$= a_1 b_j \vec{e_1} \vec{e_j} + a_2 b_j \vec{e_2} \vec{e_j} + a_3 b_j \vec{e_3} \vec{e_j}$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= a_1 b_1 \vec{e_1}\vec{e_1} + a_1 b_2 \vec{e_1}\vec{e_2} + a_1 b_3 \vec{e_1}\vec{e_3} \\ &+ a_2 b_1 \vec{e_2}\vec{e_3} + a_2 b_2 \vec{e_2}\vec{e_2} + a_2 b_3 \vec{e_2}\vec{e_3} \\ &+ a_3 b_1 \vec{e_3}\vec{e_1} + a_3 b_2 \vec{e_3}\vec{e_2} + a_3 b_3 \vec{e_3}\vec{e_3}. \end{aligned}}_{}$$

tenseur $2^{ème}$ ordre (matrice 3x3)

tenseur $3^{ème}$ ordre (cube 3D 3x3x3).

1) Symbole de kroneckers, δ

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{i,j} \quad i,j = 1,2,3$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix}$$

L C

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{i,j} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2) Symbole de permutation, e_{ijk} ($\varepsilon_{ijk} \neq \varepsilon_{ij}$)

$$e_{ijk} \begin{cases} 1 \rightarrow & \text{permutation sens horaire} \\ & (ijk) = (123)\ (312)\ (231) \\ 0 \rightarrow & 2 \text{ indices identiques } \text{"} e_{iik} = 0 \text{"} \\ -1 \rightarrow & \text{permutation sens trigo.} \\ & (ijk) = (321)\ (132)\ (213). \end{cases}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$e_{ijk} = e_{kij} = e_{jki} \Rightarrow 1$$

$$e_{ijk} = -e_{kji} = -e_{ikj} = -e_{jik} \Rightarrow -1.$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_i^{\,1} \wedge \vec{e}_j^{\,2} &= \vec{e}_{3k} \\ \vec{e_j} \wedge \vec{e_i} &= -\vec{e_k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \underset{1}{\vec{e_i}} \wedge \underset{2}{\vec{e_j}} = \underset{123}{e_{ijk}}\ \underset{3}{\vec{e_k}}$$

3) Symbole de "Levi - Civita" : $e_{ijk}\, e_{lmn}$

$$e_{ijk}\, e_{lmn} = \mathrm{Det} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{il} \left(\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{jn} \right)$$

$$- \delta_{im} \cancel{\left(\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{kl} \delta_{jn} \right)}$$

$$+ \delta_{in} \cancel{\left(\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{kl} \delta_{jm} \right)}$$

Si $i = l$: $\quad e_{ijk} \, e_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{jn}$

$$\underbrace{e_{ijk} \, e_{mni}}_{=} \rightarrow = \text{"} e_{imn} \text{"}$$

$$\underbrace{e_{ijk} \, e_{imn}}_{=}$$

⚠ $\underbrace{e_{iik}}_{= 0} \, e_{lmn} = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$I_A = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$II_A = tr(A^{\#}) =$

$\hookrightarrow$ comatrice

$III_A = \det(A)$

invariants.