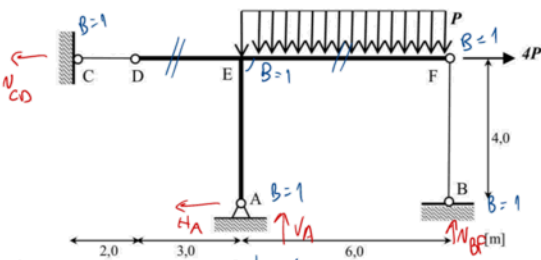


1) A estrutura representada na Figura 1 é constituída pelo elemento rígido ADEF apoiado em A e nas bielas CD e BF. Nota:  $A_{CD} = A_{BF} = 2,5 \text{ cm}^2$ ,  $E = 210,0 \text{ GPa}$  e S235. Determine:

- O grau de hiperestaticidade;
- A deformada da estrutura (represente-a claramente);
- As equações de compatibilidade atendendo à deformada anterior;
- As equações da estática;
- Os esforços normais nas bielas em função de P;
- As tensões normais das bielas para  $P = 10 \text{ kN}$ ;
- A carga máxima da estrutura em regime elástico;
- Efetuada uma análise incremental determine a carga de colapso da estrutura;
- Admitindo uma variação de temperatura de mais  $10^\circ\text{C}$  na biela BF e  $P = 10 \text{ kN}$ , determine as tensões normais nas bielas.

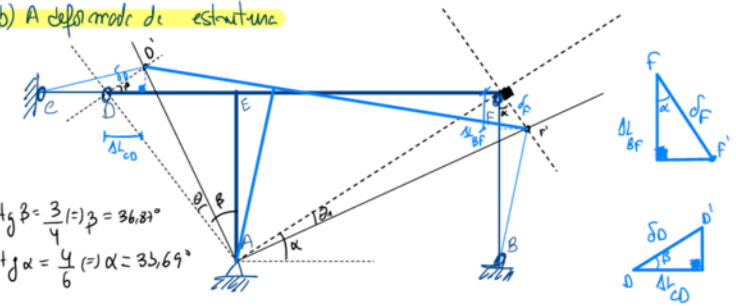


a) Grau de Hiperestaticidade

$$B = 5; L = 2$$

$$\alpha = 3L - B = 3 \times 2 - 5 = 1 \text{ vez hiperestático} \rightarrow 1 \text{ eq. hiperestaticidade}$$

b) A deformada da estrutura



$$\tan \beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = 36,87^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{6} \Rightarrow \alpha = 33,69^\circ$$

c) Equações de Compatibilidade atendendo à deformada

$$\tan \alpha = \frac{\delta_P}{\Delta F} = \frac{\delta_D}{\Delta D} \Rightarrow \frac{\delta_P}{\sqrt{4+6^2}} = \frac{\delta_D}{\sqrt{4+3^2}} \Rightarrow \delta_P = \frac{\delta_D}{2,43} \times 5 \Rightarrow \delta_P = 0,6935 \delta_D \quad 1,442 \delta_D$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta L_{CD}}{\delta_D} \Rightarrow \delta_D = \frac{\Delta L_{CD}}{\cos \beta}; \quad \cos \alpha = \frac{\Delta L_{BF}}{\delta_P} \Rightarrow \delta_P = \frac{\Delta L_{BF}}{\cos \alpha}$$

$$\delta_P = 0,6935 \delta_D \Rightarrow \frac{\Delta L_{BF}}{\cos \alpha} = 0,6935 \times \left( \frac{\Delta L_{CD}}{\cos \beta} \right) \Rightarrow \frac{N_{BF} \times L_{BF}}{E \times A_{BF} \cos 33,69^\circ} = 0,6935 \times \left( \frac{N_{CD} \times L_{CD}}{E \times A_{CD} \cos 36,87^\circ} \right)$$

$$f) \frac{N_{BF} \times 6}{\cos 36,87^\circ} = 0,693 \times \frac{N_{CD} \times 2}{\cos 36,87^\circ} \quad (=) \quad N_{BF} = 0,7499 N_{CD}$$

d) As equações de estática

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{CD} - H_A + 4P = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + N_{BF} - 6 \cdot P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 \times P \times \frac{6}{2} + 4P \times 4 - N_{BF} \times 6 - N_{CD} \times 4 = 0 \Rightarrow 34P - N_{BF} \times 6 - N_{CD} \times 4 = 0$$

$$18P + 16P = 34P \quad |$$

e) Os esforços normais nos bielas em função de P.

$$\begin{cases} \text{Eq. Compatibilidade} \\ \text{Eq. de Estática} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{BF} = 0,7499 N_{CD} \\ 34P - N_{BF} \times 6 - N_{CD} \times 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{BF} = 2,9998 \times P \\ N_{CD} = 4 \times P \end{cases}$$

f) As tensões normais nos bielas para  $P = 10 \text{ kN}$

$$\nu = \frac{N}{A}$$

$$\nu_{BF} = \frac{N_{BF}}{A_{BF}} = \frac{2,9998 \times 10}{2,5 \times 10^{-4}} = 119.992 \text{ kPa} = 119,992 \text{ MPa}$$

$$\nu_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{4 \times 10}{2,5 \times 10^{-4}} = 160000 \text{ kPa} = 160 \text{ MPa} \quad \leftarrow \text{1.ª Barra o plastificar}$$

g) A carga máxima da estrutura em regime elástico

$$N_{Rd} > N_{ed} \Rightarrow 210 \times 10^3 > \frac{4 \cdot P}{2,5 \times 10^{-4}} \Rightarrow P \leq 13,125 \text{ kN} \Rightarrow P_{elástico} = 13,125 \text{ kN}$$

h) Determine a carga colapso da estrutura

$$34P = 6 N_{BF} \Rightarrow N_{BF} = 5,667 \cdot P$$

$$N_{BF} = 2,9998 \cdot P = 13,125 \text{ kN}$$

$$N_{Rd} > N_{ed} \Rightarrow 210 \times 10^3 = \frac{2,9998 \times 13,125 + 5,667 \times P}{2,5 \times 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow \Delta P \leq 2,317 \text{ kN}$$

$$P_{colapso} = P_{elástico} + \Delta P \Rightarrow P = 13,125 + 2,317 \Rightarrow P = 15,442 \text{ kN}$$

1) A estrutura representada na Figura 1 é constituída pelo elemento rígido ACDE apoiado em A e nas bielas BC e EF. Nota:  $A_{BC} = A_{EF} = 1,7 \text{ cm}^2$ ,  $E = 210,0 \text{ GPa}$  e S275. Determine:

- O grau de hiperestaticidade;
- A deformada da estrutura (represente-a claramente);
- As equações de compatibilidade atendendo à deformada anterior;
- As equações da estática;
- Os esforços normais nas bielas em função de P;
- As tensões normais das bielas para  $P = 10 \text{ kN}$ ;
- Em função dos resultados obtidos critique a escolha das secções utilizadas nas bielas;
- A carga máxima da estrutura em regime elástico;
- Efetuada uma análise incremental determine a carga de colapso da estrutura;
- Admitindo uma variação de temperatura de mais  $-20^\circ \text{C}$  na biela EF e  $P = 10 \text{ kN}$ , determine as tensões normais nas bielas.

Exame Pearson

05/02/2020

a) Grau de Hiperestaticidade

$$\alpha = 3L - B$$

$$L = 2$$

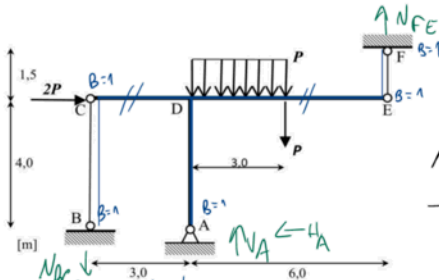
$$B = 5$$

$$\alpha = 3 \times 2 - 5$$

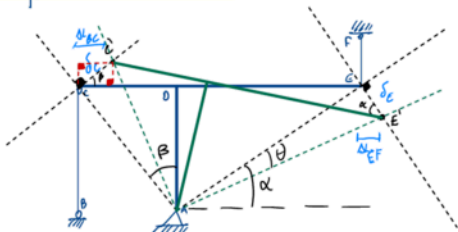
$$\Rightarrow \alpha = 1$$

→ Estrutura 1.º grau hiperestática

→ 1 equação de equilíbrio



b) Deformada da estrutura



$$\tan \alpha = \frac{4}{6} (\Rightarrow) \alpha = 33,69^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{3}{4} (\Rightarrow) \beta = 36,87^\circ$$

c) Equações de compatibilidade

$$\delta_E = \frac{\delta_C}{AC} = \frac{\delta_C}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\delta_C}{5} (\Rightarrow) \delta_E = \frac{\delta_C}{5} \times (2 \times \sqrt{5}) (\Rightarrow) \delta_E = 1,442 \delta_C$$

$$\cos \alpha = \frac{N_{EF}}{\delta_E} (\Rightarrow) \delta_E = \frac{N_{EF}}{\cos \alpha} ; \cos \beta = \frac{N_{BC}}{\delta_C} (\Rightarrow) \delta_C = \frac{N_{BC}}{\cos \beta}$$

$$\delta_E = 1,442 \delta_C (\Rightarrow) \frac{N_{EF}}{\cos \alpha} = 1,442 \frac{N_{BC}}{\cos \beta} (\Rightarrow) \frac{N_{EF} \times L_{EF}}{E \times A_{EF}} = 1,442 \left( \frac{N_{BC} \times L_{BC}}{E \times A_{BC}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{N_{EF} \times 1,5}{\cos 33,69^\circ} = 1,442 \times \frac{N_{BC} \times 4,2}{\cos 36,87^\circ} (\Rightarrow) N_{EF} \times 1,5 = 5,99 N_{BC} (\Rightarrow) N_{EF} = 3,99 N_{BC}$$

d) Equações de Estática

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_H = 0 (\Rightarrow) 2 \cdot P - A_H = 0 \\ \sum F_V = 0 (\Rightarrow) N_{BC} + N_{EF} + V_A - P - 3 \times P = 0 \\ \sum M_A = 0 (\Rightarrow) N_{BC} \times 3 + 2 \times P \times 4 + 3 \times P \times \frac{3}{2} + P \times 3 - N_{EF} \times 6 \end{array} \right. (\Rightarrow) \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array} \right.$$

$$-3 N_{BC} - 6 N_{EF} + 15,5 P = 0$$

e) Espaços normais nos bielos em função de P.

$$\begin{cases} N_{EF} = 3,999 N_{BC} \\ -3N_{BC} - 6N_{EF} + 15,5P = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Pde resolver de} \\ \text{Sist. equações} \\ \text{matricial} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_{EF} = 2,296 \times P \\ N_{BC} = 0,574 \times P \end{cases}$$

f) As tensões normais nos bielos para  $P = 10 \text{ kN}$   $\sigma = \frac{N}{A}$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{0,574 \times 10}{1,7 \times 10^{-4}} = 33764,706 \text{ Pa} \approx 33,765 \text{ kPa}$$

A barra com mais espessa é a primeira a plastificar!!

$$\sigma_{EF} = \frac{N_{EF}}{A_{EF}} = \frac{2,296 \times 10}{1,7 \times 10^{-4}} = 135058,824 \text{ Pa} \approx 135,059 \text{ kPa}$$

g) Critique a escolha das secções utilizadas nos bielos

A barra com mais espessa é a barra EF, visto que existe uma grande diferença entre ambos os barras, talvez poderíamos diminuir a secção de aço para que os espessos fossem mais aproximados um do outro.

h) A carga máxima da estrutura

$$N_{Rd} \geq N_{ed} \Rightarrow 2,75 \times 10^3 \geq \frac{2,296P}{1,7 \times 10^{-4}} \Rightarrow P \leq \underline{\underline{20,33 \text{ kN}}} = P_{\text{elástico}}$$

i) Carga colapso de estrutura

$$3N_{BC} = 15,5 \times \Delta P \Rightarrow 4N_{BC} = 5,167 \Delta P$$

$$\rightarrow N_{Rd} \geq N_{sd} \text{ ou } N_{ed} \Rightarrow 2,75 \times 10^3 \geq \frac{0,574 \times 20,33 + 5,167 \cdot \Delta P}{1,7 \times 10^{-4}} \Rightarrow \Delta P \leq 6,791 \text{ kN}$$

$$\rightarrow P_{\text{colapso}} = P_{\text{elástico}} + \Delta P \Rightarrow P_{\text{colapso}} = 20,33 + 6,791 \Rightarrow P_{\text{colapso}} = \underline{\underline{27,12 \text{ kN}}}$$

j) Admitindo Variação de Temperatura  $-20^\circ\text{C}$  na biela EF e  $P = 10 \text{ kN}$ , determine as tensões normais nos bielos.

$$\rightarrow \sigma_E = 1,202 \Delta T_{EF} = 1,202 \times \frac{N_{EF} \alpha_{EF}}{E \times A_{EF}} = 1,202 \times \frac{N_{EF} \times 1,5}{206 \times 10^9 \times 1,7 \times 10^{-4}} = 0,000505 N_{EF}$$

$$\rightarrow \sigma_B = 0,000505 \times N_{GF} - (\alpha \cdot \Delta T_L) = 0,000505 \times N_{GF} - (12 \times 10^{-6} \times 20 \times 1,5) = 0,000505 N_{GF} - 0,00036$$

$$\rightarrow \sigma_C = 0,7999 \Delta T_{BC}$$

(?)



2) [3,00] Na figura 2 estão representadas as tensões em duas facetas (A e B) num ponto no interior de uma chapa de aço (EPT).

Exame e  
Recurso

16/02/2024

- Calcule a tensão tangencial na faceta A;
- Determine as tensões principais;
- Determine as extensões principais;
- Admitindo que a tensão de rotura à tração ( $\sigma_t$ ) é de 235 MPa, verifique pelo respetivo critério de resistência o estado de tensão.

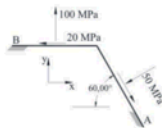


Figura 2

Nota: considere  $E=210\text{GPa}$  e  $\nu=0,20$

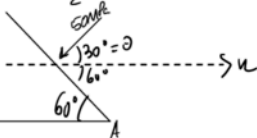
$$\begin{aligned} \sigma_x &= 100 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -20 \text{ MPa} \end{aligned}$$

a) Calcule a tensão tangencial na faceta A.

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

Do Formulário

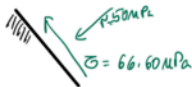
$$\tau_\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\theta=30^\circ} &= -50 \quad (-50 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \times 30^\circ) \\ &\quad + (-20) \times \sin(2 \times 30^\circ)) \Rightarrow \sigma'_x = -76,906 \text{ MPa} \end{aligned}$$

→ Tensão Tangencial:

$$\tau_{\theta=30^\circ} = \frac{100 - (-76,906)}{2} \times \sin(2 \times 30^\circ) + (-20) \times \cos(2 \times 30^\circ) = 66,60 \text{ MPa}$$



Tensão das Tensões  $\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} -76,906 & -20 \\ -20 & 100 \end{bmatrix}$

b) Determinar Tensões Principais

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-76,906 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-76,906 - 100}{2}\right)^2 + (-20)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 102,23 \text{ MPa} \quad \wedge \quad \sigma_2 = -79,14 \text{ MPa}$$

c) Determinar as extensões Principais

Tensões Principais  $= \begin{cases} \sigma_1 = 102,23 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -79,14 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = 102,23 \mu\epsilon \\ \epsilon_2 = 0 \\ \epsilon_3 = -79,14 \mu\epsilon \end{cases}$

$$\epsilon_1 = \frac{102,33 - 0,2(0 + (-79,14))}{210 \times 10^3} = 0,000563 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_2 = \frac{0 - 0,2(102,33 + (-79,14))}{210 \times 10^3} = -0,000221 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_3 = \frac{-79,14 - 0,2(102,33 + 0)}{210 \times 10^3} = -0,000474 \text{ MPa}$$

d) Verificação pelo critério de resistência

chapa de aço  $\leadsto$  Material Dúctil

Critério de Von Mises

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_e = 235 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(102,33 - 0)^2 + (102,33 - (-79,14))^2 + (0 - (-79,14))^2} \leq 235$$

$$\Rightarrow 157,585 \leq 235 \text{ [MPa]} \quad \underline{\text{Resiste!!}}$$

Exame  
Recurso

5/02/2020

2) O estado de tensão num ponto é dado pelo seguinte tensor referido aos eixos X, Y e Z:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 0 \\ 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

a) Determine as tensões e direções principais e represente-as fisicamente num paralelepípedo elementar.

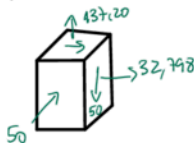
a) Tensões e direções principais

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} \sigma_1 = 137,20 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 32,798 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \Rightarrow \sigma_1 = 137,20 \text{ MPa}; \sigma_2 = 32,798 \text{ MPa}; \sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{2\tau_{xy}}\right) = 53,35^\circ$$

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_x}{2\tau_{xy}}\right) = -36,65^\circ$$



- b) Supondo que posteriormente se adicionou o estado plano de tensão definido na Figura 2, determine o tensor das tensões resultante relativo aos eixos X, Y e Z.

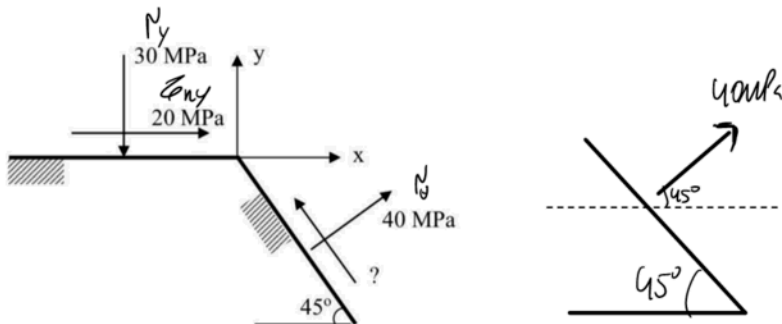


Figura 2.

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\Leftrightarrow 40 = \frac{\sigma_x + (-30)}{2} + \frac{\sigma_x - (-30)}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + (-20) \times \sin(2 \times 45^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_x = 150 \text{ MPa}$$

**Tensor das Tensões:**

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 0 \\ 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 150 & -20 & 0 \\ -20 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 & 30 & 0 \\ 140 & 70 & 0 \\ 30 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

2) A figura 2 representa o estado de tensão num ponto de uma chapa de aço (EPT).

- Faça a representação do estado de tensão num paralelepípedo;
- Faça a representação do estado de tensão no círculo de Mohr;
- Determine as tensões principais analiticamente e através do círculo de Mohr;
- Determine as extensões principais;
- Admitindo que a tensão de cedência é igual a 235,0 MPa, verifique pelo respetivo critério de resistência o estado de tensão.

Exame  
Normal

16/01/2014

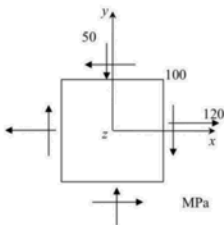
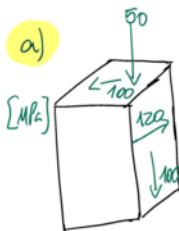


Figura 2.

Nota: considere  $E=210\text{GPa}$  e  $\nu=0,20$



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & -50 \end{bmatrix}$$

b) Representação do Estado Tensão no círculo de Mohr

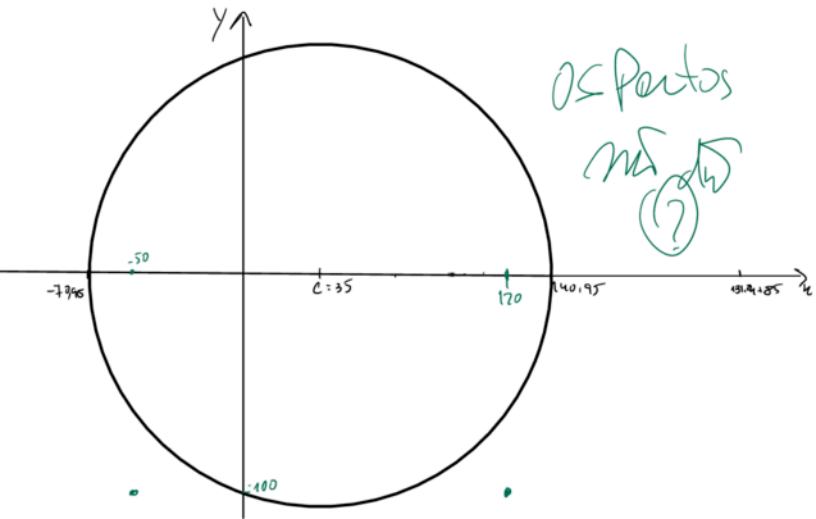
$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{120 + (-50)}{2} = 35$$

$$R_{\text{Mohr}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{120 - (-50)}{2}\right)^2 + (-100)^2} = 105,95 \text{ mm}$$

Pontos:

$$X \begin{bmatrix} 120; -100 \end{bmatrix}$$

$$Y \begin{bmatrix} -50; -100 \end{bmatrix}$$



os pontos  
na  
(?)

c) Determine as tensões principais analiticamente e a direção do círculo de Mohr

C.M.:

$$\sigma_1 = C + R \cos \theta = 35 + 105,95 = 140,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = C - R \cos \theta = 35 - 105,95 = -70,95 \text{ MPa}$$

Analicamente:

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{120 + (-50)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120 - (-50)}{2}\right)^2 + (-100)^2}$$
$$\sigma_1 = 140,95 \text{ MPa} ; \sigma_2 = -70,95 \text{ MPa} ; \sigma_3 = 0$$

d) Determine as extensões principais

Tensões Principais ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ )  $\Rightarrow \sigma_{1x} = 140,95 \text{ MPa} ; \epsilon_{1y} = 0 ; \epsilon_{1z} = -70,95 \text{ MPa}$

$$\begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\ \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\ \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases} = \begin{cases} \frac{120 - 0,2(0 + (-70,95))}{210 \times 10^3} = 0,000639 \\ \frac{0 - 0,2(140,95 + (-70,95))}{210 \times 10^3} = -0,0006667 \\ \frac{-70,95 - 0,2(140,95 + 0)}{210 \times 10^3} = -0,000472 \end{cases}$$

e) Verifique pelo Critério de Resistência

Material Dúctil  $\Rightarrow$  Critério Von Mises

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_c \quad (235 \text{ MPa})$$

$$\Rightarrow \sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(140,95 - 0)^2 + (140,95 - (-70,95))^2 + (0 - (-70,95))^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{eq} = 186,82 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_c \quad (\Rightarrow) \quad 186,82 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$$

O.K.!  $\Rightarrow$  Resiste