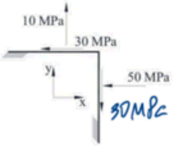
2) A figura 2 representa o estado de tensão num ponto de uma chapa de aço (EPT).

a) Faça a representação do estado de tensão no círculo de Mohr;
b) Determine as tensões principais analiticamente e através do círculo de Mohr;
c) Determine as extensões principais;
d) Admitindo que a tensão de cedência é igual a 235,0 MPa, verifique pelo respetivo critério de resistência o estado de tensão.

Exame Normal

7/01/22



$X(\overset{\sigma_x}{-50}; 30)$

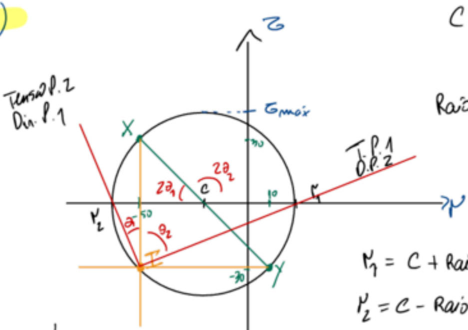
$Y(\overset{\sigma_y}{10}; -30)$

Figura 2.

Nota: considere E=210GPa e υ=0,20

a) e b)

Círculo Mohr:



$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-50+10}{2} = -20$

$Raio = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-50-10}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 42{,}426$

$\sigma_1 = C + Raio = -20 + 42{,}426 = 22{,}426$

$\sigma_2 = C - Raio = -20 - 42{,}426 = -62{,}426$

Analiticamente:

$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\times(-30)}{-50-10}\right) \Leftrightarrow \theta = 22{,}5°$

1 das maneiras possíveis

$\sigma_{\theta=22,5} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\cdot\sin(2\times\theta) = \frac{-50+10}{2} + \frac{-50-10}{2}\times\cos(2\times 22{,}5) + (-30)\times\sin(2\times 22{,}5)$

$\theta_2 = \theta_1 - 90° = 22{,}5 - 90 = -67{,}5$; $\theta_1 = -62{,}426 = \sigma_1$

c) Tensões Principais:

$\begin{cases} \sigma_1 = 22{,}426 \\ \sigma_2 = -62{,}426 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$ (MPa) $\Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 22{,}426 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -62{,}426 \end{cases}$ (MPa)

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{22{,}426 - 0{,}2(0 + (-62{,}426))}{210\times10^3} = 0{,}000166$ MPa

$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \frac{0 - 0{,}2(22{,}426 + (-62{,}426))}{210\times10^3} = 0{,}0000381$ MPa

$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = \frac{-62{,}426 - 0{,}2(22{,}426 - 0)}{210\times10^3} = -0{,}0000319$ MPa

d) Pelo critério de Von Mises:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_e = 235\,MPa$$

neste caso

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(22,426 - 0)^2 + (22,426 - (-62,426))^2 + (0 - (-62,426))^2} \leq 235$$

$$\Leftrightarrow 76,16 \leq 235 \; [MPa] \longrightarrow \text{Resiste à Tensão.}$$

3) Uma viga, materializada por um perfil IPE200 em aço S275, na seção mais desfavorável está sujeita aos seguintes esforços: N = 40 kN (compressão), M_y = 10 kN.m e M_z = 5 kN.m. Considerando que o esforço normal de compressão está aplicado excentricamente na secção (ver Figura 3) e que o sentido dos momentos em relação aos eixos *y* e *z* são os indicados na figura:

a) Identifique, justificando, o tipo de flexão;

b) Determine a posição do eixo neutro;

c) Trace o diagrama de tensões normais.

Exame Especial

04/09/2019

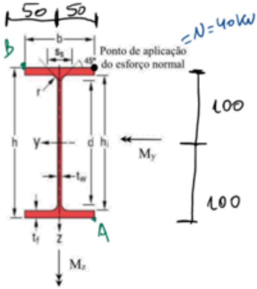
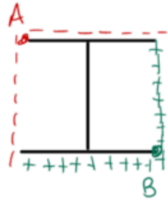


Figura 3 - Posição do **perfil IPE200** e ponto de aplicação do esforço normal de 40 kN de compressão.



a) Tipo de Flexão

1º $N \neq 0$, $M \neq 0$ ⇒ logo, a flexão é composta

2º O eixo de flexão não coincide com um eixo principal central de inércia, então: ⇒ Flexão Composta Desviada

b) Determinar a posição do eixo neutro

($\sigma = 0$ → igualar tensões a zero)

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$$M_y^R = M_y + M_y^N = 10 + 40 \times 0{,}1 = 14 \text{ kN/m}$$

$$M_z^R = M_z + M_z^N = 5 - 40 \times 0{,}05 = 3 \text{ kN/m}$$

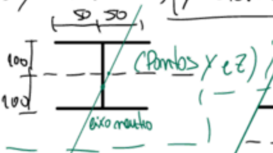
$$\sigma = \frac{-40}{28{,}48 \times 10^{-4}} \oplus \frac{14}{19{,}43 \times 10^{-4}} \times z \ominus \frac{3}{142{,}4 \times 10^{-8}} \times y \Rightarrow \sigma = 0$$

Eq. eixo neutro

$$\Rightarrow \boxed{y = 0{,}342 \cdot z - 0{,}0067}$$

$y = 0 \rightarrow z = 15{,}6$ mm (1)

$z = 0 \rightarrow y = -6{,}7$ mm (2)



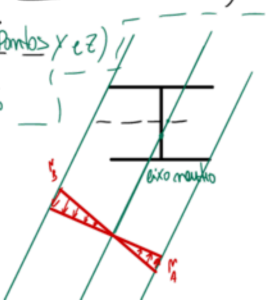
c) Trace o diagrama de tensões normais

$$\sigma_{máx\ Compressão} = \frac{-40}{28{,}48 \times 10^{-4}} + \frac{4}{19{,}43 \times 10^{-8}} \times (-0{,}100) - \frac{3}{142{,}4 \times 10^{-8}} \cdot (0{,}05) = 191{,}44 \text{ MPa}$$

(B) Compressão

$$\sigma_{máx\ Tração} = \frac{-40}{28{,}48 \times 10^{-4}} + \frac{4}{19{,}43 \times 10^{-8}} \times (0{,}100) - \frac{3}{142{,}4 \times 10^{-8}} \cdot (-0{,}05) = 163{,}34 \text{ MPa}$$

(A) Tração



3) Considere a secção transversal constituída por um perfil da série IPN140, em aço S235, representada na Figura 3.1, sujeita aos esforços representados na Figura 3.2, i.e., vetor momento fletor com o sentido indicado (Msd=5,0 kNm) e força axial de compressão aplicada no ponto A (Nsd=2,5 kN). O perfil está inclinado, ver Figura 3.2.

a) Determine a posição do eixo neutro;

b) Trace o diagrama de tensões normais, indicando os respetivos valores;

c) Verifique se a tensão normal máxima é admissível.

Exame Recurso 5/02/2020

$M_y = 5 \times \cos 20 = 4{,}69\,kN$

$M_z = 5 \times \sin 20 = 1{,}71\,kN$

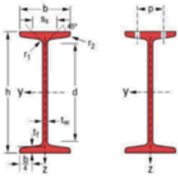


Figura 3.1

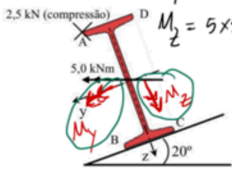


Figura 3.2

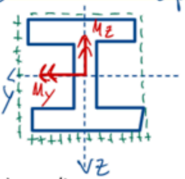
dados necessários:

	G kg/m	h mm	b mm	t_w mm	t_f mm	r_1 mm	r_2 mm	A cm^2	d mm	∅	p_{min} mm	p_{max} mm	A_L m^2/m	A_G m^2/t
IPN 120	11.1	120	58	5.1	7.7	5.1	3.1	14.2	92.4	-	-	-	0.439	39.38
IPN 140	14.3	140	66	5.7	8.6	5.7	3.4	18.3	109.1	-	-	-	0.502	34.94
IPN 160	17.9	160	74	6.3	9.5	6.3	3.8	22.8	125.8	-	-	-	0.575	32.13
IPN 180	21.9	180	82	6.9	10.4	6.9	4.1	27.9	142.4	-	-	-	0.64	29.22

	G kg/m	I_y cm^4	$W_{el,y}$ cm^3	$W_{pl,y}$♦ cm^3	i_y cm	A_{vz} cm^2	I_z cm^4	$W_{el,z}$ cm^3	$W_{pl,z}$♦ cm^3	i_z cm	s_s mm	I_t cm^4	$I_w \times 10^3$ cm^6	S 235	S 355	S 235	S 355
IPN 120	11.1	328	54.7	63.6	4.81	6.63	21.5	7.41	12.4	1.23	28.4	2.71	0.69	1	1	1	1
IPN 140	14.3	573	81.9	95.4	5.61	8.65	35.2	10.7	17.9	1.40	31.8	4.32	1.54	1	1	1	1
IPN 160	17.9	935	117	136	6.4	10.83	54.7	14.8	24.9	1.55	35.2	6.57	3.14	1	1	1	1
IPN 180	21.9	1450	161	187	7.2	13.35	81.3	19.8	33.2	1.71	38.6	9.58	5.92	1	1	1	1

a) Determine a posição do eixo neutro

(+) → Tração ; (−) → Compressão



$N = 2{,}5\,kN$

$M_y^R = \underbrace{2{,}5 \times 0{,}07}_{Nez} + \underbrace{4{,}69}_{My} = 4{,}865\ kN/m$

$M_z^R = \underbrace{2{,}5 \times 0{,}033}_{Ney} - \underbrace{1{,}71}_{Mz} = -1{,}6275\ kN/m$

$\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \times z \pm \frac{M_z}{I_z} \times y \Rightarrow \frac{-2{,}5}{18{,}3 \times 10^{-4}} + \frac{4{,}865}{573 \times 10^{-8}} \cdot z + \frac{1{,}6275}{35{,}2 \times 10^{-8}} \cdot y$ (×0) (×0)

$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \stackrel{(\times 10^3)}{=} 0{,}295\,mm \\ y \stackrel{(\times 10^3)}{=} 1{,}61\,mm \end{cases}$

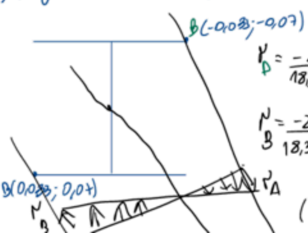
c) $\sigma_{máx}$ admissível

$\sigma_{Rd} = 235\,MPa < \sigma_{máx} = 353{,}62\,MPa$

está O.K

é admissível

b) Diagrama de Tensões normais e respetivos Valores:



$\sigma_D = \frac{-2{,}5}{18{,}3 \times 10^{-4}} + \frac{4{,}365 \times (-0{,}07)}{573 \times 10^{-8}} + \frac{1{,}6275(-0{,}033)}{35{,}2 \times 10^{-8}} = 213{,}347\,(comp)\ kPa$

$\sigma_B = \frac{-2{,}5}{18{,}3 \times 10^{-4}} + \frac{4{,}865(0{,}07)}{573 \times 10^{-8}} + \frac{1{,}6275(0{,}033)}{35{,}2 \times 10^{-8}} = 210{,}645\ kPa$ (Tração)

(s/ prática)

Exame Normal

08/01/2020

3) Uma viga, materializada por um perfil retangular de secção oca com 150 x 75 x 10 mm em aço S355, na secção mais desfavorável está sujeita aos seguintes esforços: N = 70 kN (compressão), M_y=20 kN.m e M_z=15 kN.m. Considerando que o esforço normal de compressão está aplicado excentricamente na secção (ver Figura 3) e que os sentidos dos momentos são os indicados na figura:

a) Determine a posição do eixo neutro;

b) Trace o diagrama de tensões normais.

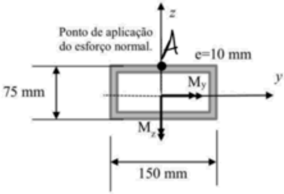
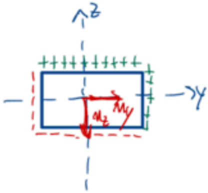


Figura 3.



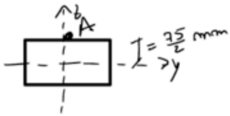
a) Posição do eixo neutro

$$I_y = \frac{15 \times 7{,}5^3}{12} - \frac{13 \times 5{,}5^3}{12} = 347{,}10 \text{ cm}^4$$

← Vazio

$$A = 15 \times 7{,}5 - 13 \times 5{,}5 = 41 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{7{,}5 \times 15^3}{12} - \frac{5{,}5 \times 13^3}{12} = 1102{,}42 \text{ cm}^4$$



$\frac{75}{2}$ mm

$$\Rightarrow M_y^R = M_y + N \cdot e_z = 20 - 70 \times \left(\frac{75}{2} \times 10^{-3}\right) = 17{,}375 \text{ kN/m}$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y \Leftrightarrow \frac{70}{41 \times 10^{-4}} + \frac{17{,}375}{347{,}10 \times 10^{-8}} \times z - \frac{15}{1102{,}42 \times 10^{-8}} \times y = 0$$

$$\Leftrightarrow -1360642{,}95 y + 5005762{,}036 \cdot z = 17073{,}17 \quad (A)$$

$$z = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \simeq -12{,}55 \text{ mm} \wedge z \simeq 3{,}41 \text{ mm} \quad (B)$$

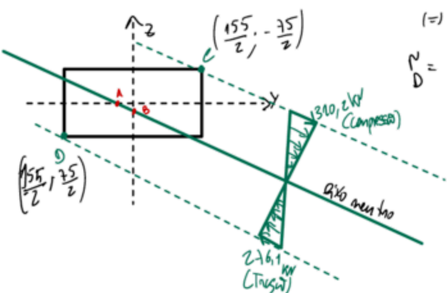
b) Diagrama de Tensões normais

$$\sigma_C = \frac{70}{41 \times 10^{-4}} + \frac{17{,}375}{347{,}10 \times 10^{-8}} \times \left(\frac{155}{2}\right)^{\times 10^{-3}} - \frac{15}{1102{,}42 \times 10^{-8}} \times \left(-\frac{75}{2}\right)^{\times 10^{-3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_C = -310{,}25 \text{ MPa}$$

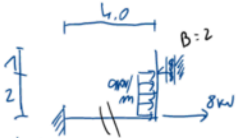
$$\sigma_D = \frac{70}{41 \times 10^{-4}} + \frac{17{,}375}{347{,}10 \times 10^{-8}} \times \left(\frac{155}{2}\right)^{\times 10^{-3}} - \frac{15}{1102{,}42 \times 10^{-8}} \times \left(\frac{75}{2}\right)^{\times 10^{-3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_D = 276{,}24 \text{ MPa}$$



4 → Deformações

Problema 4.33



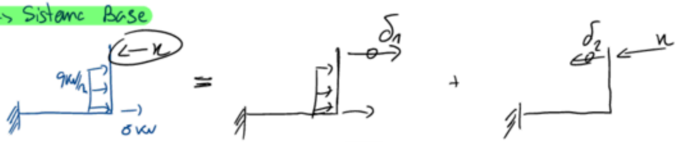
1 → Grau de Hiperestaticidade

$B = 2 \quad ; \quad L = 1$

$\alpha = 3L - B \Leftrightarrow \alpha = 3 \times 1 - 2 = \underline{\underline{1}}$ → 1 vez hiperestática

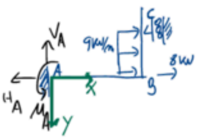
a) Dois sistema-base possíveis, indicando as respetivas incógnitas

2 → Sistema Base



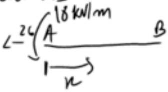
Equação de compatibilidade : $\boxed{\delta_1 + \delta_2 = 0}$

3 → Cálculo de δ_1



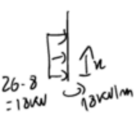
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A = 9 \times 2 + 8 = 26\,kN \\ V_A = 0 \\ M_A - 9 \times 2{,}0 \times 1{,}0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A = 26\,kN\ (\leftarrow) \\ V_A = 0 \\ M_A = 18\,kN/m\ (\circlearrowleft) \end{cases}$$

Barra $\overline{AB}$ $\quad 0 \leq x \leq 4$



$M_{AB}(x) = -18\,kN/m$

Barra $\overline{BC}$ $\quad 0 < x < 3$



$M_{BC}(x) = -18 + 18x - 4{,}5x^2$

3.1 → Método de integração de linha Elástica (AB)

$\boxed{y'' = -\frac{M}{EI}}$

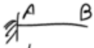
Troço $\overline{AB}$ $\quad 0 \leq x \leq 4$

$y''_{AB} = -\frac{M_{AB}}{EI} = -\frac{1}{EI}(-18) = \frac{1}{EI}(18)$

$y'_{AB} = \frac{1}{EI}(18x + C_1)$

$y_{AB} = \frac{1}{EI}\left(\frac{18x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2\right)$

3.2 → Condições de Fronteira ($\overline{AB}$)



[→ Devido ao encastramento em A a rotação em A é nula

↳ Deslocamento vertical é nulo em A.

$\Rightarrow y'_A = 0 \Rightarrow y'_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow \delta_A \Rightarrow y_{AB}(x=0) \Rightarrow C_2 = 0$

3.3 → Método de integração da linha Elástica ($\overline{BC}$)

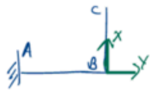
Troço $\overline{BC}$ $\quad 0 \le x \le 2{,}0$

$$y''_{BC} = -\frac{M_{BC}}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(-4{,}5x^2 + 18x - 18\right) = \frac{1}{EI}\left(4{,}5x^2 - 18x + 18\right)$$

$$y'_{BC} = \frac{1}{EI}\left(\frac{4{,}5x^3}{3} - \frac{18x^2}{2} + 18x + C_3\right)$$

Quando $x=0$ Apenas fica C_3!

$$y_{BC} = \frac{1}{EI}\left(\frac{4{,}5x^4}{12} - \frac{18x^3}{6} + \frac{18x^2}{2} + C_3 x + C_4\right)$$



3.4 → Condições de Fronteira ($\overline{BC}$)

→ Nó B é Rígido $\Rightarrow y_B^{esq} = y_B^{dir.} \Rightarrow y'_{AB}(x=4{,}0) = y'_{BC}(x=0)$

$$\Rightarrow y'_{AB}(x=4) = y'_{BC}(x=0) \Leftrightarrow \frac{1}{EI}(18\times 4) = \frac{1}{EI}(C_3) \Leftrightarrow C_3 = 72$$

$$\frac{1}{EI}\left(9x^2 - 3x^3 + \frac{4{,}5}{12}x^4 + 72x\right)$$

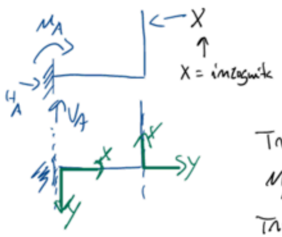
→ Deslocamento em B à direita é nulo (a barra AB é indeformável axialmente)

$$y_{BC}(x=0) = 0 \Leftrightarrow C_4 = 0$$

3.5 → O valor de δ_1

$$\delta_1 = y_{BC}(x=2{,}0) = \frac{1}{EI}\left(4{,}5\times\frac{2{,}0^4}{12} - 18\times\frac{2{,}0^3}{6} + 18\times\frac{2^2}{4} + 72\times 2\right) = \frac{162}{EI}$$

4 → Cálculo de δ_2



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow H_A - X = 0 \Leftrightarrow H_A = X\ (\rightarrow) \\ \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow V_A = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \Leftrightarrow M_A - X\times 2 \Leftrightarrow M_A = 2\cdot X\ (\curvearrowright) \end{cases}$$

Troço $\overline{AB}$, $0 \le x \le 2$

$$M_{AB}(x) = 2\cdot X$$

Troço $\overline{BC}$, $0 \le x \le 2$

$$M_{BC}(x) = 2\cdot X - X\cdot x$$

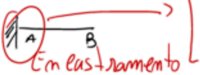
4.1 -> Integração da Linha Elástica ($\overline{AB}$) $y'' = -\frac{M}{EI}$

$$y''_{AB} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}(2 \cdot X) = \frac{1}{EI}(-2 \cdot X)$$

$$y'_{AB} = \frac{1}{EI}(-2 \cdot X \cdot x + C_1)$$

$$y_{AB} = \frac{1}{EI}\left(-2 \cdot X \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

4.2 -> Condições de Fronteira ($\overline{AB}$)



Rotação nula $\Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow y'_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Deslocamento nulo $\Rightarrow y = 0 \;/\; \delta_A = 0 \Rightarrow y_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$\Rightarrow y'_{AB} = \frac{1}{EI}(-2 \cdot X \cdot x) \quad ; \quad y_{AB} = \frac{1}{EI}\left(-2 \cdot X \cdot \frac{x^2}{2}\right)$$

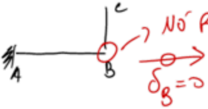
4.3 -> Integração da Linha Elástica ($\overline{BC}$) Troço $\overline{BC}$ $0 \leq x \leq 2$

$$y''_{BC} = -\frac{1}{EI} = -\frac{1}{EI}(2 \cdot X - X \cdot x) = \frac{1}{EI}(-2 \cdot X + X \cdot x)$$

$$y'_{BC} = \frac{1}{EI}\left(-2 \cdot X \cdot x + X \cdot \frac{x^2}{2} + C_3\right)$$

$$y_{BC} = \frac{1}{EI}\left(-2 \cdot X \cdot \frac{x^2}{2} + X \cdot \frac{x^3}{6} + C_3 \cdot x + C_4\right)$$

4.4 -> Condições Fronteira ($\overline{BC}$)



$\Rightarrow \varphi_B^{esq} = \varphi_B^{dir} \;;\; y'_{AB}(x=4) = y'_B(x=0)$

$\Rightarrow$ A deformação axial da barra AB é desprezável $\Rightarrow \varphi_{BC}(x=0) = 0$

$\Rightarrow$ Vamos calcular C_3 e C_4

$$y'_{AB}(x=4) = y'_{BC}(x=0) \Leftrightarrow \frac{1}{EI}(-2 \cdot X \cdot 4) = \frac{1}{EI}\overbrace{\left(\cancel{-2 \cdot X \cdot 0} + \cancel{X \cdot \frac{0^2}{2}} + C_3\right)}^{C_3} \Leftrightarrow C_3 = -8 \cdot X$$

$$y_{BC}(x=0) = 0 \Leftrightarrow C_4 = 0$$

4.5 -> Lei das Rotações e deslocamentos

$$y'_{BC} = \frac{1}{EI}\left(X \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot X \cdot x \overset{C_3}{- 8 \cdot X}\right)$$

$$y_{BC} = \frac{1}{EI}\left(X \cdot \frac{x^3}{6} - 2 \cdot X \cdot \frac{x^2}{2} \overset{C_3}{- 8 \cdot X} \cdot x \overset{C_4}{+ 0}\right)$$

4.6 -> Valor de δ_2

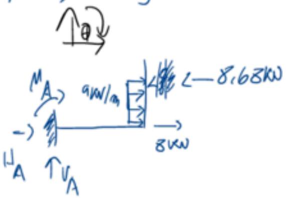
$$\delta_2 = y_{BC}(x=2) = \frac{1}{EI}\left(X\cdot\frac{2^3}{6} - 2\cdot X\cdot\frac{2^2}{2} - 8\cdot X\cdot 2 + 0\right) = \boxed{\frac{1}{EI}\left(-\frac{56}{3}\cdot X\right) \quad \text{ou} \quad \delta_2 = \frac{-56}{3\cdot EI}\cdot X}$$

5 -> Cálculo da Incógnita Hiperestática, X

→ Eq. Compatibilidade ⇒ $\boxed{\delta_1 + \delta_2 = 0}$

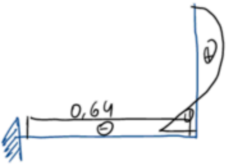
$$\Leftrightarrow \frac{162}{EI} + \left(-\frac{56}{3EI}\cdot X\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{162}{EI} - \frac{56}{3EI}\cdot X = 0 \Leftrightarrow \boxed{X = 8{,}68 \text{ kN } (\leftarrow)}$$

b) Traçar Diagrama de Momentos Fletores



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow -8{,}68 + 9\times 2 + H_A + 8 = 0 \Leftrightarrow H_A = -17{,}32 \text{ kN } (\leftarrow) \\ \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow V_A = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \Leftrightarrow M_A + 8\times 0 + 9\times 2\times\frac{2}{2} - 8{,}68\times 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_A = -0{,}64 \text{ kNm } (\circlearrowleft)$$



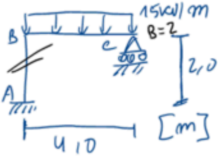
-> Equações dos momentos:

$$M_{AB}(x) = -0{,}64$$

$$M_{BC}(x) = -(\overset{H_A}{17{,}32} - \overset{8kN}{8})x - \overset{9kN/m}{\frac{9x^2}{2}} - \overset{M_A}{0{,}64}$$

$$= 4{,}5x^2 + 9{,}32x - 0{,}64$$

Exame 30/01/2024 -> Problema 4

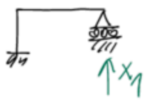


a) Grau de Hiperestaticidade

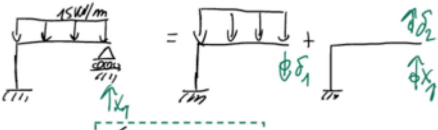
$\beta = 2$; $L = 1$

$\alpha = 3L - \beta = 3 - 2 = 1$ grau hiperestático

b) Dois Sistemas base



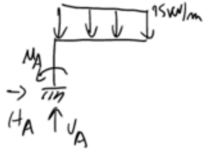
Sistema base:



⇒ Equação de compatibilidade: $\delta_1 + \delta_2 = 0$

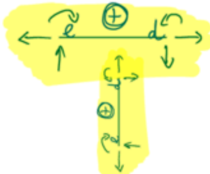
1-> Cálculo de δ_1

1.1-> Cálculo de Reações e Diagrama de Momentos



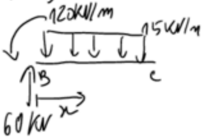
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow V_A - 15 \times 4{,}0 = 0 \Leftrightarrow V_A = 60 \text{ kN } (\uparrow) \\ \Sigma M_A = 0 \Leftrightarrow M_A - 15 \times 4 \times \frac{4}{2} = 0 \Leftrightarrow M_A = 120 \text{ kN/m } (\circlearrowleft) \end{cases}$$

Troço $\overline{AB}$ $\quad 0 \leq x \leq 2 \quad$ (sem esforço => constante)



$M_{AB}(x) = -120$ kN/m

Troço $\overline{BC}$ $\quad 0 \leq x \leq 4$



$M_{BC}(x) = -15 \times x \times \frac{x}{2} + 60 \times x - 120 = -7{,}5x^2 + 60x - 120$

1.2-> Integração da Linha Elástica

$y'' = -\frac{M}{EI}$ $\quad (\overline{AB})$

$$y''_{AB} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}(-120) = \frac{1}{EI}(120)$$

$$y'_{AB} = \frac{1}{EI}(120x + C_1)$$

$$y_{AB} = \frac{1}{EI}\left(120\frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

1.3-> Condições de Fronteira

-> Rotação nula => $\varphi_A = 0 \Rightarrow y'_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow y'_{AB}(x=0) \Rightarrow C_1 = 0$

-> Deslocamento nulo => $\delta_A = 0 \Rightarrow y_{AB}(x=0) = 0 \Rightarrow y_{AB}(x=0) \Rightarrow C_2 = 0$

1.4-> Lei das Rotações e dos Deslocamentos $(\overline{AB})$

$$y'_{AB} = \frac{1}{EI}(120 \cdot x)$$

$$y_{AB} = \frac{1}{EI}\left(120 \cdot \frac{x^2}{2}\right)$$