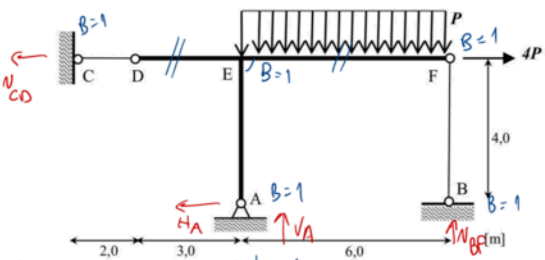


1) A estrutura representada na Figura 1 é constituída pelo elemento rígido ADEF apoiado em A e nas bielas CD e BF. Nota:  $A_{CD} = A_{BF} = 2,5 \text{ cm}^2$ ,  $E = 210,0 \text{ GPa}$  e S235. Determine:

- O grau de hiperestaticidade;
- A deformada da estrutura (represente-a claramente);
- As equações de compatibilidade atendendo à deformada anterior;
- As equações da estática;
- Os esforços normais nas bielas em função de P;
- As tensões normais das bielas para  $P = 10 \text{ kN}$ ;
- A carga máxima da estrutura em regime elástico;
- Efetuada uma análise incremental determine a carga de colapso da estrutura;
- Admitindo uma variação de temperatura de mais  $10^\circ\text{C}$  na biela BF e  $P = 10 \text{ kN}$ , determine as tensões normais nas bielas.

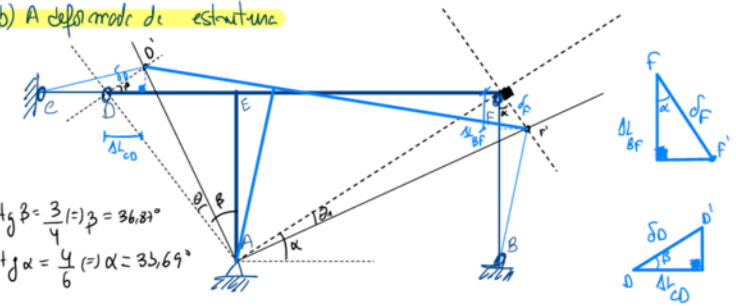


a) Grau de Hiperestaticidade

$B = 5$ ;  $L = 2$

$\alpha = 3L - B = 3 \times 2 - 5 = 1$   $\rightarrow$  hiperestático  $\rightarrow$  1 eq. hiperestaticidade

b) A deformada da estrutura



c) Equações de Compatibilidade atendendo à deformada

$\tan \beta = \frac{\delta P}{\Delta F} = \frac{\delta D}{\Delta D} \Rightarrow \frac{\delta P}{\sqrt{4+6^2}} = \frac{\delta D}{\sqrt{4+3^2}} \Rightarrow \delta P = \frac{\delta D}{2.5} \times 5 \Rightarrow \delta F = 0.6935 \delta D$   $1.442 \delta D$

$\cos \beta = \frac{\Delta L_{CD}}{\delta D} \Rightarrow \delta D = \frac{\Delta L_{CD}}{\cos \beta}$  ;  $\cos \alpha = \frac{\Delta L_{BF}}{\delta P} \Rightarrow \delta P = \frac{\Delta L_{BF}}{\cos \alpha}$

$\delta P = 0.6935 \delta D \Rightarrow \frac{\Delta L_{BF}}{\cos \alpha} = 0.6935 \times \left( \frac{\Delta L_{CD}}{\cos \beta} \right) \Rightarrow \frac{N_{BF} \times L_{BF}}{E \times A_{BF} \cos 33.69^\circ} = 0.6935 \times \left( \frac{N_{CD} \times L_{CD}}{E \times A_{CD} \cos 36.87^\circ} \right)$

$$e) \frac{N_{BF} \times 6}{\cos 36,87^\circ} = 0,693 \times \frac{N_{CD} \times 2}{\cos 36,87^\circ} \quad (=) \quad N_{BF} = 0,7499 N_{CD}$$

d) As equações de estática

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{CD} - H_A + 4P = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + N_{BF} - 6 \cdot P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 \times P \times \frac{6}{2} + 4P \times 4 - N_{BF} \times 6 - N_{CD} \times 4 = 0 \Rightarrow 34P - N_{BF} \times 6 - N_{CD} \times 4 = 0$$

$$18P + 16P = 34P \quad |$$

e) Os esforços normais nos bielos em função de P.

$$\begin{cases} \text{Eq. Compatibilidade} \\ \text{Eq. de Estática} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{BF} = 0,7499 N_{CD} \\ 34P - N_{BF} \times 6 - N_{CD} \times 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{BF} = 2,9998 \times P \\ N_{CD} = 4 \times P \end{cases}$$

f) As tensões normais nos bielos para  $P = 10 \text{ kN}$

$$\nu = \frac{N}{A}$$

$$\nu_{BF} = \frac{N_{BF}}{A_{BF}} = \frac{2,9998 \times 10}{2,5 \times 10^{-4}} = 119.992 \text{ kPa} = 119,992 \text{ MPa}$$

$$\nu_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{4 \times 10}{2,5 \times 10^{-4}} = 160000 \text{ kPa} = 160 \text{ MPa} \quad \leftarrow \text{1.ª Barra o plastificar}$$

g) A carga máxima da estrutura em regime elástico

$$N_{Rd} > N_{ed} \Rightarrow 210 \times 10^3 > \frac{4 \cdot P}{2,5 \times 10^{-4}} \Rightarrow P \leq 13,125 \text{ kN} \Rightarrow P_{elástico} = 13,125 \text{ kN}$$

h) Determine a carga colapso da estrutura

$$34P = 6 N_{BF} \Rightarrow N_{BF} = 5,667 \cdot P$$

$$N_{BF} = 2,9998 \cdot P = 13,125 \text{ kN}$$

$$N_{Rd} > N_{ed} \Rightarrow 210 \times 10^3 = \frac{2,9998 \times 13,125 + 5,667 \times P}{2,5 \times 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow \Delta P \leq 2,317 \text{ kN}$$

$$P_{colapso} = P_{elástico} + \Delta P \Rightarrow P = 13,125 + 2,317 \Rightarrow P = 15,442 \text{ kN}$$

## Examen Puntos

- 05/02/2020



$$\alpha = 3L - \beta$$

$$L = 2$$

$\beta = 5$

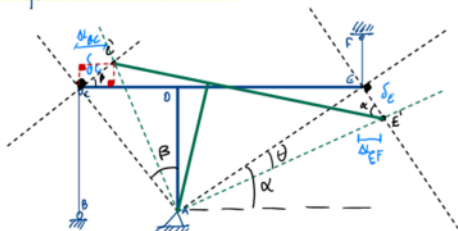
$$\alpha = 3 \times 2 - 5$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

→ Estuário 1 neg  
hiperestica

→ 1 equação de equilíbrio

5) Deformée de structure



$$\frac{1}{6}\alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = 33,69^\circ$$

$$\lg B = \frac{3}{4} \Rightarrow B = 36,87^\circ$$

c) Equações de compatibilidade

$$f_{\theta} = \frac{\delta E}{\delta C} = \frac{\delta C}{\sqrt{4+C^2}} = \frac{\delta C}{\sqrt{4+3}} \Rightarrow \delta E = \frac{\delta C}{5} \times (2\sqrt{5}) \Rightarrow \delta E = 1.442 \delta C$$

$$\cos \alpha = \frac{NEF}{f_E} \Rightarrow f_E = \frac{NEF}{\cos \alpha} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{NLBC}{f_C} \Rightarrow f_C = \frac{NLBC}{\cos \beta}$$

$$\delta_E = 1,442 \delta_C \Rightarrow \frac{\Delta L_{EF}}{\cos \alpha} = 1,442 \frac{\Delta L_{BC}}{\cos \beta} \Rightarrow \frac{\frac{N_{EF} \times L_{EF}}{E \times A_{EF}}}{\cos 31,65^\circ} = 1,442 \left( \frac{\frac{N_{BC} \times L_{BC}}{E \times A_{BC}}}{\cos 36,87^\circ} \right)$$

$$F) \frac{N_{GF} \times 1.5}{\cos 33.69^\circ} = 1.442 \times \frac{N_{BC} \times 4.2}{\cos 36.87^\circ} \quad (-) N_{EF} \times 1.5 = 5.99 N_{BC} \quad (-) N_{GF} = 3.999 N_{BC}$$

d) Equações de Estática

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_N = 0 \quad (1) \quad 2 \cdot P - H_A = 0 \\ \Sigma F_V = 0 \quad (2) \quad N_{BC} + N_{GP} + V_A - P \cdot 3 \times P = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \quad (3) \quad N_{BC} \times 3 + 2 \cdot P \times 4 + 3 \cdot P \times \frac{3}{2} + P \times 3 - N_{FE} \times 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array}$$

e) Espaços normais nos bidos em função de P.

$$\begin{cases} N_{EF} = 3,999 N_{BC} \\ -3N_{BC} - 6N_{EF} + 15,5P = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Pde resolver de} \\ \text{Sist. equações} \\ \text{matricial} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_{EF} = 2,296 \times P \\ N_{BC} = 0,574 \times P \end{cases}$$

f) As tensões normais nos bidos para  $P = 10 \text{ kN}$   $\sigma = \frac{N}{A}$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{0,574 \times 10}{1,7 \times 10^{-4}} = 33764,706 \text{ Pa} \approx 33,765 \text{ kPa}$$

A barra com mais espessa é a primeira a plastificar!!

$$\sigma_{EF} = \frac{N_{EF}}{A_{EF}} = \frac{2,296 \times 10}{1,7 \times 10^{-4}} = 135058,824 \text{ Pa} \approx 135,059 \text{ kPa}$$

g) Critique a escolha das secções utilizadas nos bidos

A barra com mais espessa é a barra EF, visto que existe uma grande diferença entre ambos os barras, talvez poderíamos diminuir a secção de aço para que os espessos fossem mais aproximados um do outro.

h) A carga máxima da estrutura

$$N_{Ed} \geq N_{el} \Rightarrow 2,75 \times 10^3 \geq \frac{2,296P}{1,7 \times 10^{-4}} \Rightarrow P \leq \underline{\underline{20,33 \text{ kN}}} = P_{elástico}$$

i) Carga colapso de estrutura

$$3N_{BC} = 15,5 \times \Delta P \Rightarrow 4N_{BC} = 5,167 \Delta P$$

$$\rightarrow N_{Ed} \geq N_{sd} \text{ ou } N_{Ed} \Rightarrow 2,75 \times 10^3 \geq \frac{0,574 \times 20,33 + 5,167 \cdot \Delta P}{1,7 \times 10^{-4}} \Rightarrow \Delta P \leq 6,791 \text{ kN}$$

$$\rightarrow P_{colapso} = P_{elástico} + \Delta P \Rightarrow P_{colapso} = 20,33 + 6,791 \Rightarrow P_{colapso} = \underline{\underline{27,12 \text{ kN}}}$$

j) Admitindo Variação de Temperatura  $-20^\circ\text{C}$  na bida EF e  $P = 10 \text{ kN}$ , determine as tensões normais nos bidos.

$$\rightarrow \sigma_E = 1,202 \Delta T_{EF} = 1,202 \times \frac{N_{EF} \alpha_{EF}}{E \times A_{EF}} = 1,202 \times \frac{N_{EF} \times 1,5}{206 \times 10^9 \times 1,7 \times 10^{-4}} = 0,000505 N_{EF}$$

$$\rightarrow \sigma_B = 0,000505 \times N_{GF} - (\alpha \cdot \Delta T) = 0,000505 \times N_{GF} - (12 \times 10^{-6} \times 20 \times 1,5) = 0,000505 N_{GF} - 0,00036$$

$$\rightarrow \sigma_C = 0,7999 \Delta T_{BC}$$

(?)

