$$\text{Rotaciones}\begin{cases}\text{Simples} \rightarrow R_x, R_y, R_z \\ \text{Compuestos} \rightarrow \begin{array}{l} R = R_1 R_2 \text{ (directa)} \\ R = R_2 R_1 \text{ (inverso)} \end{array}\end{cases}$$

Interpretación de las rotaciones:

a) Describe la orientación de un sistema Σ_i, c.r.a. un sistema Σ_{i-1}

$${}^{i-1}_{i}R$$

b) Transformo un vector de un sistema de coordenados Σ_i a otro (Σ_{i-1})

$${}^{i-1}p = {}^{i-1}_{i}R\, {}^{i}p$$

c) Roto un vector en el mismo sistema de coordenados

$$\bar{p} = Rp$$

Ejemplo

Sean 3 sistemas de coordenados diestros denotados como Σ_1, Σ_2 y Σ_3. Los sistemas Σ_2 y Σ_1 se encuentran con una orientación distinta a Σ_1, según se muestra en las matrices de rotación

$${}^{1}_{2}R = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{1}_{3}R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtengo la matriz de rotación que denota la orientación del sistema Σ_3 con respecto del sistema Σ_2

$${}^{1}_{2}R \quad , {}^{}_{3}R$$

Ref

$${}^{2}_{3}R = {}^{2}_{1}R\, {}^{1}_{3}R = {}^{1}_{2}R^{T}\, {}^{1}_{3}R$$

act

$${}^{2}_{3}R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz de rotación que denota la orientación del sistema Σ_1 con respecto del sistema Σ_2. **Valor: 2/10**

3. Considere dos sistemas de coordenadas: Σ_A y Σ_B. Sea ${}^A_BP$ el vector que describe la posición del origen de Σ_B con respecto de Σ_A y ${}^A_BR$ la matriz de rotación que denota la orientación de Σ_B con respecto de Σ_A. Si ${}^AP$ es el vector que denota la posición de un punto P en el sistema Σ_A, determine el vector que denota la posición de P en el sistema Σ_B. Considere

Traslación   rotación

$$ {}^A_BP = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad {}^A_BR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad {}^AP = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. $$

$$ {}^AP = {}^A_BP + {}^A_BR\,\boxed{{}^BP} $$

Valor: 2/10

$$ {}^A_BR^T = {}^A_BR^{-1} $$

$$ {}^A_BR^T\left[{}^AP = {}^A_BP + {}^A_BR\,{}^BP\right] $$

$$ {}^A_BR^T\,{}^AP = {}^A_BR^T\,{}^A_BP + \underbrace{\boxed{{}^A_BR^T\,{}^A_BR}}_{I}\,{}^BP $$

${}^AP$

$$ {}^A_BR^T\,{}^AP - {}^A_BR^T\,{}^A_BP = {}^BP $$

$$ {}^A_BR^T\left({}^AP - {}^A_BP\right) = {}^BP $$

$$ {}^BP = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}_{{}^A_BR^T}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{{}^AP} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{{}^A_BP}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} $$

3.-

$$ {}^{B}P = \overset{\text{Traslación}}{{}^{B}_{A}P} + \overset{\text{Rotación}}{{}^{B}_{A}R}\;{}^{A}P $$

$$ \boxed{-{}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}_{B}P} \qquad \boxed{{}^{A}_{B}R^{T}} $$

$\therefore$

$$ {}^{B}P = -{}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}_{B}P + {}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}P $$

$$ {}^{B}P = {}^{A}_{B}R^{T}\left({}^{A}P - {}^{A}_{B}P\right) $$

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\left[{}^{A}P = {}^{A}_{B}P + {}^{A}_{B}R\;{}^{B}P\right] $$

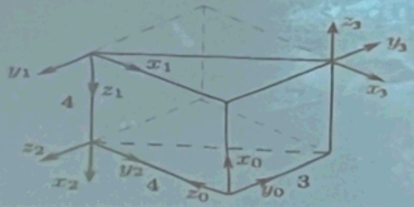
$$ {}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}P = {}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}_{B}P + \overset{I}{\boxed{{}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}_{B}R}}\;{}^{B}P $$

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}P - {}^{A}_{B}R^{T}\;{}^{A}_{B}P = {}^{B}P $$

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\left({}^{A}P - {}^{A}_{B}P\right) = {}^{B}P $$

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{{}^{A}P} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{{}^{A}_{B}P} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix} $$

4. Considere los sistemas Σ_0, Σ_1, Σ_2 y Σ_3 mostrados en la figura. Obtenga las transformaciones homogéneas ${}^1_0T$, ${}^2_1T$.



$$\left[\begin{array}{c|c} & {}^1_0P \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\quad\right]$$

28-Feb

4.-

Ref

$$ {}^{1}_{0}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{1}_{0}R & & {}^{1}_{0}P \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Act

$$ {}^{2}_{3}T = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$