

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Desbalanceamentos:

- Estático: centro de massa do rotor localizado fora do eixo de rotação do sistema, i.e. $(G - C) = x_G\hat{i} + y_G\hat{j}$.
- Dinâmico: produtos de inércia J_{Cxz} e J_{Cyz} do rotor **não nulos**. Eixo principal longitudinal de inércia não coincide com o eixo de rotação do sistema.

➤ Esforços Externos Atuantes no Rotor

- Apenas as **forças de reações radiais dinâmicas** devidas à **rotação constante aplicadas pelos mancais no rotor** são consideradas. As forças externas ativas, inclusive o peso, são ignoradas da análise.
- Os mancais são admitidos como vínculos do tipo anel.



$$\vec{R}_{\text{ext}} = \vec{R}_A + \vec{R}_B = (X_A + X_B)\hat{i} + (Y_A + Y_B)\hat{j} \quad (1)$$

$$\vec{M}_C = (A - C) \wedge \vec{R}_A + (B - C) \wedge \vec{R}_B = L_A\hat{k} \wedge (X_A\hat{i} + Y_A\hat{j}) - L_B\hat{k} \wedge (X_B\hat{i} + Y_B\hat{j}) = (L_BY_B - L_A Y_A)\hat{i} + (L_A X_A - L_B X_B)\hat{j} \quad (2)$$

➤ Aceleração do Centro de Massa

$$\underbrace{\vec{a}_G}_{=\vec{0} \text{ (ponto fixo)}} + \underbrace{{}^F\vec{\alpha}^R}_{=\vec{0} \text{ (rotação constante)}} \wedge (G - A) + \underbrace{{}^F\vec{\omega}^R}_{=\Omega\hat{k} \text{ (rotação eixo fixo)}} \wedge [{}^F\vec{\omega}^R \wedge (G - A)] \Rightarrow \vec{a}_G = \Omega\hat{k} \wedge [\Omega\hat{k} \wedge (x_G\hat{i} + y_G\hat{j})] \Rightarrow \vec{a}_G = -\Omega^2(x_G\hat{i} + y_G\hat{j}) \quad (3)$$

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Aplicação do TMB

- Aplicando-se o TMB ao rotor e utilizando os resultados das Eqs. (1) e (3), obtém-se:

$$\vec{R}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G \rightarrow (X_A + X_B)\hat{i} + (Y_A + Y_B)\hat{j} = -m\Omega^2(x_G\hat{i} + y_G\hat{j}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} X_A + X_B &= -m\Omega^2 x_G \\ Y_A + Y_B &= -m\Omega^2 y_G \end{aligned}} \quad (4)$$

➤ Aplicação do TMQM

- Aplicando-se o TMQM ao rotor com respeito ao polo C e utilizando os resultados da Eq. (2), obtém-se:

$$\vec{M}_C = m(\underbrace{G - C}_{=\vec{0} \text{ (sobre eixo de rotação fixo)}}) \wedge \underbrace{\vec{a}_C}_{=\vec{0} \text{ (rotação constante)}} + [I_A] \underbrace{\vec{\alpha}^{\mathcal{R}}}_{=\vec{0} \text{ (rotação constante)}} + \underbrace{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{R}}}_{=\Omega\hat{k} \text{ (rotação em torno de eixo fixo)}} \wedge ([I_C] {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{R}}), \quad [I_C] {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} J_{Cx} & -J_{Cxy} & -J_{Cxz} \\ -J_{Cxy} & J_{Cy} & -J_{Cyz} \\ -J_{Cxz} & -J_{Cyz} & J_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{Cxz}\Omega \\ -J_{Cyz}\Omega \\ J_{Cz}\Omega \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}_C &= \Omega\hat{k} \wedge (-J_{Cxz}\Omega\hat{i} - J_{Cyz}\Omega\hat{j} + J_{Cz}\Omega\hat{k}) = \Omega^2(J_{Cyz}\hat{i} - J_{Cxz}\hat{j}) \\ (L_B Y_B - L_A Y_A)\hat{i} + (L_A X_A - L_B X_B)\hat{j} &= \Omega^2(J_{Cyz}\hat{i} - J_{Cxz}\hat{j}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} L_B Y_B - L_A Y_A &= \Omega^2 J_{Cyz} \\ L_B X_B - L_A X_A &= \Omega^2 J_{Cxz} \end{aligned}} \quad (5)$$

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Esforços nos Mancais

- Resolvendo o sistema equações lineares (Eqs. 4-5) para os esforços reativos nos mancais, obtém-se:

$$\vec{R}_A = \left(-m\Omega^2 x_G \frac{L_B}{L} - J_{C_{xz}} \frac{\Omega^2}{L} \right) \hat{i} + \left(-m\Omega^2 y_G \frac{L_B}{L} - J_{C_{yz}} \frac{\Omega^2}{L} \right) \hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{R}_A = -m\Omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \frac{L_B}{L} - \frac{\Omega^2}{L} (J_{C_{xz}} \hat{i} + J_{C_{yz}} \hat{j})} \quad (6)$$

$$\vec{R}_B = \left(-m\Omega^2 x_G \frac{L_A}{L} + J_{C_{xz}} \frac{\Omega^2}{L} \right) \hat{i} + \left(-m\Omega^2 y_G \frac{L_A}{L} + J_{C_{yz}} \frac{\Omega^2}{L} \right) \hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{R}_B = -m\Omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \frac{L_A}{L} + \frac{\Omega^2}{L} (J_{C_{xz}} \hat{i} + J_{C_{yz}} \hat{j})} \quad (7)$$

- Desbalanceamento estático puro:** $J_{C_{xz}} = J_{C_{yz}}$

$$\begin{aligned} \vec{R}_A &= -m\Omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \frac{L_B}{L} \\ \vec{R}_B &= -m\Omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \frac{L_A}{L} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{R}_A &= -\vec{F}_{in} \frac{L_B}{L}, & \vec{R}_B &= -\vec{F}_{in} \frac{L_A}{L} \\ \vec{F}_{in} &= m\Omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \end{aligned}} \Rightarrow \quad (8)$$

- $\vec{R}_A \parallel \vec{R}_B$, em fase entre si (mesma direção e sentido) e no mesmo plano que \vec{F}_{in} . As forças radiais **nos mancais** também estão em fase com \vec{F}_{in} .
- As magnitudes das forças radiais são proporcionais às distâncias relativas dos mancais ao centro de massa.
- No **referencial do rotor**, as forças radiais nos mancais "equilibram" a força de inércia gerada pelo desbalanceamento estático, i.e. $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F}_{in} = \vec{0}$.

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Esforços nos Mancais

- **Desbalanceamento de momentos puro:** $x_G = y_G$

$$\vec{R}_A = -\frac{\Omega^2}{L}(J_{Cxz}\hat{i} + J_{Cyz}\hat{j}), \quad \vec{R}_B = \frac{\Omega^2}{L}(J_{Cxz}\hat{i} + J_{Cyz}\hat{j})$$

$$\vec{R}_B = -\vec{R}_A = \frac{\Omega^2}{L}(J_{Cxz}\hat{i} + J_{Cyz}\hat{j}) \quad (9)$$



- **Desbalanceamento dinâmico (caso geral)**

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{As} + \vec{R}_{Ad}, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_{Bs} + \vec{R}_{Bd} \quad (10)$$

$$\vec{R}_{As} = -m\Omega^2(x_G\hat{i} + y_G\hat{j})\frac{L_B}{L}$$

$$\vec{R}_{Bs} = -m\Omega^2(x_G\hat{i} + y_G\hat{j})\frac{L_A}{L}$$

Parcela das reações devida ao
desbalanceamento estático

$$\vec{R}_{Ad} = -\frac{\Omega^2}{L}(J_{Cxz}\hat{i} + J_{Cyz}\hat{j})$$

$$\vec{R}_{Bd} = \frac{\Omega^2}{L}(J_{Cxz}\hat{i} + J_{Cyz}\hat{j})$$

Parcela das reações devida ao
desbalanceamento dinâmico



- $\vec{R}_A \parallel \vec{R}_B$ e com fase invertida entre si (mesma direção e **sentidos opostos**).
- As magnitudes das forças radiais são iguais.
- A resultante das forças radiais é nula (ausência de desbalanceamento estático).
- Como $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$ e $\vec{R}_A = -\vec{R}_B$, um **binário de forças** é estabelecido (desbalanceamento de momentos).
- No **referencial do rotor**, o binário produzido pelas forças radiais nos mancais "equilibra" o momento giroscópico gerado pelo desbalanceamento dinâmico, i.e. $\vec{M}_C + \vec{M}_{gir} = \vec{0}$.

- **Sobreposição** dos esforços devidos ao desbalanceamento estático e dinâmico.
- É possível balancear o rotor separadamente.
- Para ambos os desbalanceamentos, os esforços nos mancais são proporcionais ao quadrado da velocidade angular!

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Representação dos Esforços nos Mancais

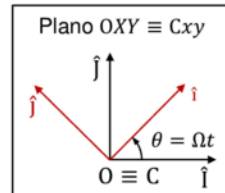
- Os resultados apresentados anteriormente dos **esforços dinâmicos aplicados pelos mancais no rotor** devido ao desbalanceamento são expressos no sistema de coordenadas *Cxyz* **do rotor**. Neste sistema, esses esforços são **constantes** para uma dada velocidade angular.
- Entretanto, para determinar as **solicitações efetivas atuantes nos mancais**, é necessário expressar os esforços dinâmicos no sistema de coordenadas *OXYZ* dos **mancais** (referencial fixo).

$$\begin{aligned}\vec{R}_A &= (X_A \hat{i} + Y_A \hat{j}) = (X_A \cos \Omega t - Y_A \sin \Omega t) \hat{I} + (X_A \sin \Omega t + Y_A \cos \Omega t) \hat{J} \\ \vec{R}_B &= (X_B \hat{i} + Y_B \hat{j}) = (X_B \cos \Omega t - Y_B \sin \Omega t) \hat{I} + (X_B \sin \Omega t + Y_B \cos \Omega t) \hat{J}\end{aligned}\quad (11)$$

Esforços no sistema de coordenadas do rotor (**constante** no tempo) Esforços no sistema de coordenadas dos mancais (**variável** no tempo com Ωt). Esforços "girantes".

$$\vec{F}_A = -\vec{R}_A, \quad \vec{F}_B = -\vec{R}_B \quad (12)$$

- \vec{R}_A, \vec{R}_B : esforços dinâmicos aplicados pelos mancais **no rotor**.
- \vec{F}_A, \vec{F}_B : esforços dinâmicos aplicados pelo rotor **nos mancais**.



- A representação dos esforços dinâmicos no **sistema de coordenadas do mancal** é particularmente importante, pois sensores de força são geralmente instalados **nos mancais** para capturar as solicitações atuantes nesses componentes. Exemplo: máquinas de balanceamento de mancais rígidos.



Conteúdo

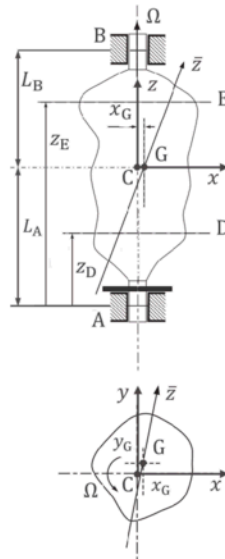
1. Introdução e Objetivos
2. Tipos de Desbalanceamento
- 3. Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos**
 - 3.1 Esforços nos Mancais
 - 3.2 Balanceamento “Teórico”**
 - 3.3 Classes de Balanceamento
4. Máquinas de Balanceamento
 - 4.1 Máquinas de Balanceamento de Mancais Rígidos
 - 4.2 Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis
5. Referências

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Balanceamento “Teórico”

- Para anular os esforços dinâmicos nos mancais, é necessário que:
 - O centro de massa do rotor seja posicionado **sobre** o eixo de rotação: balanceamento estático
 - O eixo central principal longitudinal de inércia seja **paralelo** ao eixo de rotação: balanceamento de momentos
- O eixo central principal longitudinal de inércia do rotor balanceado deve coincidir com o eixo de rotação. $G\bar{z} \rightarrow Cz$
- Suponhamos** que a posição do centro de massa (x_G, y_G) e os produtos de inércia (J_{Cxz}, J_{Cyz}) do rotor original desbalanceado \mathcal{R} sejam conhecidos.
 - Deseja-se balancear o rotor adicionando **duas massas** de balanceamento m_D e m_E localizadas nos planos de balanceamento z_D e z_E , em raios R_D e R_E , com posições angulares θ_D e θ_E .
 - Neste caso, as coordenadas do centro de massa e os produtos de inércia do **rotor modificado** devem se anular:

$$x'_G = 0, \quad y'_G = 0, \quad J'_{Cxz} = 0, \quad J'_{Cyz} = 0 \quad (13)$$



❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Balanceamento “Teórico”

- Centro de massa do rotor modificado (sistema $Cxyz$ do rotor):

$$(m + m_D + m_E)x'_G = mx_G + m_D R_D \cos \theta_D + m_E R_E \cos \theta_E = 0$$

$$(m + m_D + m_E)y'_G = my_G + m_D R_D \sin \theta_D + m_E R_E \sin \theta_E = 0$$

- Produtos de inércia do rotor modificado (sistema $Cxyz$ do rotor):

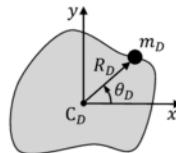
$$J'_{C_{xz}} = J_{C_{xz}} + m_D R_D \cos \theta_D z_D + m_E R_E \cos \theta_E z_E = 0$$

$$J'_{C_{yz}} = J_{C_{yz}} + m_D R_D \sin \theta_D z_D + m_E R_E \sin \theta_E z_E = 0$$

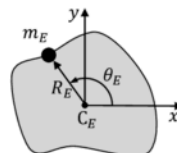
- As expressões acima podem ser organizadas no seguinte sistema equações lineares:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ z_D & z_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_D & z_E \end{bmatrix}}_{A: \text{Matriz dos coeficientes}} \begin{bmatrix} u_D \cos \theta_D \\ u_E \cos \theta_E \\ u_D \sin \theta_D \\ u_E \sin \theta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mx_G \\ -my_G \\ -J_{C_{xz}} \\ -J_{C_{yz}} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} u_D &= m_D R_D \\ u_E &= m_E R_E \end{aligned} \quad (14)$$

A: Matriz dos coeficientes



Planos de balanceamento $z = z_D$



Planos de balanceamento $z = z_E$

Sistema linear com 4 equações e 4 incógnitas ($u_D, \theta_D, u_E, \theta_E$).

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

➤ Balanceamento “Teórico”

- Para que o sistema linear tenha solução única diferente da trivial:

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow (-z_D^2 + 2z_D z_E - z_E^2) = -(z_D - z_E)^2 \neq 0 \rightarrow z_D \neq z_E$$

- Solução geral do problema:

1) Resolver o sistema linear (Eq. 13) para as incógnitas auxiliares $u_D \cos \theta_D$, $u_E \cos \theta_E$, $u_D \sin \theta_D$, $u_E \sin \theta_E$.

2) Utilizando as incógnitas auxiliares, vamos dizer $u_D \cos \theta_D = \alpha_D$ e $u_D \sin \theta_D = \beta_D$, obtém-se:

$$\frac{\beta_D}{\alpha_D} = \frac{u_D \sin \theta_D}{u_D \cos \theta_D} = \tan \theta_D \rightarrow \theta_D = \text{atan} \left(\frac{\beta_D}{\alpha_D} \right)$$

$$\alpha_D^2 + \beta_D^2 = (u_D^2 \cos^2 \theta_D + u_D^2 \sin^2 \theta_D) = u_D^2 \rightarrow u_D = \pm \sqrt{\alpha_D^2 + \beta_D^2}$$

Análogo para
o plano E



$$\begin{aligned} u_D &= m_D R_D = \pm \sqrt{\alpha_D^2 + \beta_D^2}, & \theta_D &= \text{atan} \left(\frac{\beta_D}{\alpha_D} \right) \\ u_E &= m_E R_E = \pm \sqrt{\alpha_E^2 + \beta_E^2}, & \theta_E &= \text{atan} \left(\frac{\beta_E}{\alpha_E} \right) \end{aligned}$$

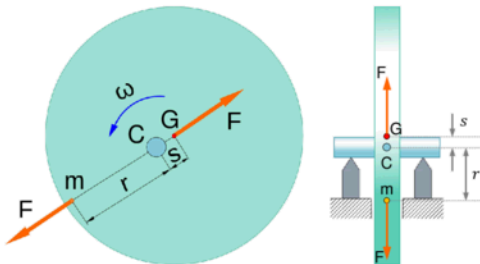
(15)

- Observar que se desejarmos adicionar (retirar) massa e tomamos a raiz positiva (negativa), devemos escolher o ângulo coerente com os valores positivos (negativos) das equações iniciais.
- Os raios de balanceamento são geralmente escolhidos conforme a geometria do rotor.

❑ Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos

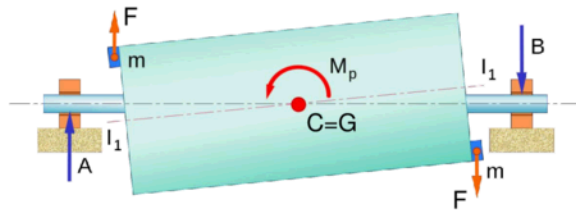
➤ Balanceamento “Teórico”

▪ Balanceamento Estático



Balanceamento estático. Fonte: [By Kaboldy](#).

▪ Balanceamento de Momentos



Balanceamento dinâmico. Fonte: [By Kaboldy](#).

C – centro geométrico
G – centro de massa
M – massa do rotor
m – massas de balanceamento

F – força centrífuga
 M_p – momento de desbalanceamento (momento giroscópico)
 I_1 – eixo central de inércia do rotor original desbalanceado
A, B – reações nos mancais do rotor original desbalanceado