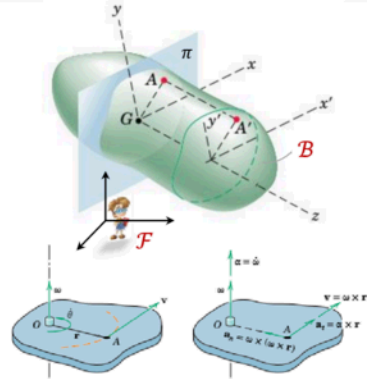


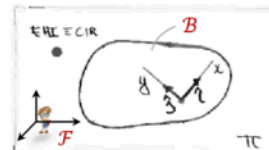
# ❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

## ➤ Movimento Plano

- O movimento plano é aplicável quando a cinemática do corpo pode ser analisada a partir do movimento dos pontos de um dado plano  $\pi$ .
- O CIR corresponde a um ponto do plano do movimento em torno do qual **todos os pontos do corpo** realizam movimento de **rotação pura em um dado instante** (ato de movimento instantâneo).
- Em um dado instante de tempo (ato de movimento instantâneo), todos os pontos do corpo realizam movimento de rotação pura em torno do CIR com velocidade angular  ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B = \omega \hat{k}$ .
- Propriedades do CIR:
  - Não coincide, necessariamente, com algum ponto do corpo (o CIR não é um ponto material);
  - Sua velocidade é sempre nula, i.e.  ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\text{CIR}} = \vec{0}$ ;
  - Sua aceleração não é, necessariamente, nula;
  - Em geral, sua posição no plano varia com o tempo;
  - Definido **apenas** para movimento plano (2D) com rotação.

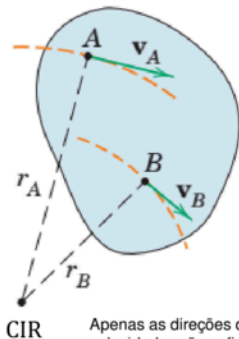


Movimento plano geral de um corpo rígido.  
Fonte: adaptado de [1].

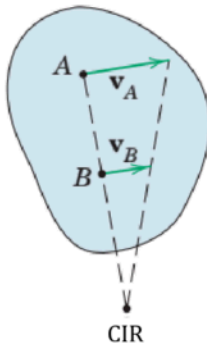


## ❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

### ➤ Movimento Plano (determinação geométrica do CIR)



Apenas as direções das  
velocidades são suficientes



As direções e magnitudes das  
velocidades são necessárias

Casos de determinação geométrica do CIR. Fonte: [1].

## ❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

### ➤ Movimento Plano (rolamento sem escorregamento)

- Condição de rolamento puro:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{P_2} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{P_1} \Rightarrow {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{0} \quad (4)$$

- Em geral, a **aceleração relativa** entre os pontos em contato **não** é nula.
- Disco ou cilindro que rola sem escorregar sobre uma superfície fixa:

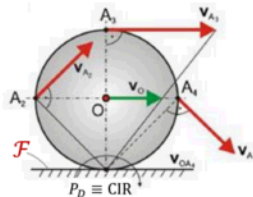
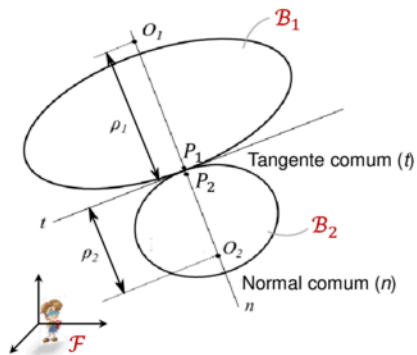
$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O = \omega R \hat{i} \quad (5)$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O = \dot{\omega} R \hat{i} \quad (6)$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{\text{CIR}} = \omega^2 R \hat{j} \quad (7)$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\text{CIR}} = \vec{0}$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{\text{CIR}} \neq \vec{0}$$



## ❑ Composição de Movimentos

- Seja um corpo rígido  $\mathcal{B}$  que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular  ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$  e aceleração angular  ${}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^{\mathcal{B}}$  em relação a um referencial fixo  $\mathcal{F}$ .
- A velocidade e aceleração de uma partícula  $P(t)$  que se move no espaço, **independentemente** de  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{B}$ , podem ser calculadas como segue:
- **Composição de Velocidades**

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P + {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P - O) \quad (8)$$

Velocidade Absoluta

Velocidade de  $P(t)$  em relação a um observador solidário a  $\mathcal{F}$ .

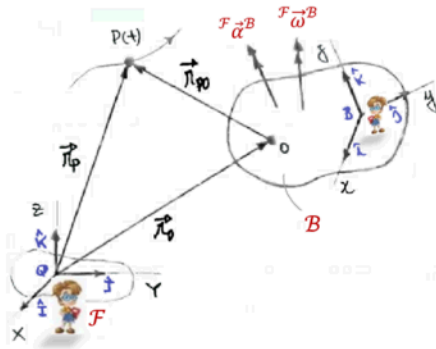
Velocidade Relativa

Velocidade de  $P(t)$  em relação a um observador solidário a  $\mathcal{B}$ .

Velocidade de Arrastamento

Velocidade de  $P(t)$  em relação a um observador solidário a  $\mathcal{F}$ , como se  $P(t)$  estivesse rigidamente fixo a  $\mathcal{B}$ .

$$\vec{v}_{P_{abs}} = \vec{v}_{P_{rel}} + \vec{v}_{P_{arr}}$$



## ❑ Composição de Movimentos

- Seja um corpo rígido  $\mathcal{B}$  que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular  ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$  e aceleração angular  ${}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^{\mathcal{B}}$  em relação a um referencial fixo  $\mathcal{F}$ .
- A velocidade e aceleração de uma partícula  $P(t)$  que se move no espaço, **independentemente** de  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{B}$ , podem ser calculadas como segue:
- **Composição de Acelerações**

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P = {}^{\mathcal{B}}\vec{a}_P + {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^{\mathcal{B}} \wedge (P - O) + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P - O)] + 2({}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P) \quad (9)$$

Aceleração Absoluta  
Aceleração de  $P(t)$  em relação a um **observador solidário a  $\mathcal{F}$**

$\vec{a}_{P_{abs}}$

Aceleração Relativa  
Aceleração de  $P(t)$  em relação a um **observador solidário a  $\mathcal{B}$**

$\vec{a}_{P_{rel}}$

Aceleração de Arrastamento  
Aceleração de  $P(t)$  em relação a um observador solidário a  $\mathcal{F}$ , **como se  $P(t)$  estivesse rigidamente fixo a  $\mathcal{B}$**

$\vec{a}_{P_{arr}}$

Aceleração de Coriolis  
Componente da aceleração de  $P(t)$  associada à variação da magnitude e direção de  $(P - O)$  em relação a  $\mathcal{F}$ .

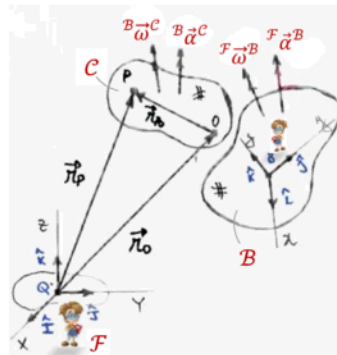
$\vec{a}_{P_{Cor}}$

$\vec{a}_{P_{abs}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{arr}} + \vec{a}_{P_{Cor}}$

## ❑ Composição de Movimentos

### ➤ Composição com Dois Corpos Rígidos

- Considere agora que **P** é um ponto rigidamente fixo a um outro corpo rígido **C** que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular  ${}^B\vec{\omega}^C$  e aceleração angular  ${}^B\vec{\alpha}^C$  **em relação ao corpo rígido B**.
- O corpo rígido **B**, por sua vez, se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular  ${}^F\vec{\omega}^B$  e aceleração angular  ${}^F\vec{\alpha}^B$  **em relação ao referencial fixo F**.
- O vetor  $\vec{r}_{PO} = (P - O)$  é um **vetor fixo a C**, sendo que o ponto O não precisa, necessariamente, pertencer a ambos os corpos. Note que, em geral,  ${}^F\vec{\omega}^C$  e  ${}^F\vec{\alpha}^C$  **não são conhecidos a priori**.
- Nestas condições, o corpo rígido **B** é denominado **referencial móvel** (ou intermediário) e, em geral, **todas as grandezas vetoriais são expressas no sistema de coordenadas Bxyz(i, j, k) solidário a B**.
- Os campos de velocidades e acelerações podem ser calculados utilizando as Eqs. (2) e (3), com **atenção especial para as definições de movimento relativo e de arrastamento**.



## ❑ Composição de Movimentos

### ➤ Composição com Dois Corpos Rígidos

- **Movimento relativo:** movimento de P em relação a B.

$$\vec{v}_{P_{rel}} = {}^B\vec{v}_P = {}^B\vec{v}_{O'} + {}^B\vec{\omega}^C \wedge (P - O') \quad \boxed{O' \in C}$$

$$\vec{a}_{P_{rel}} = {}^B\vec{a}_P = {}^B\vec{a}_{O'} + {}^B\vec{\alpha}^C \wedge (P - O') + {}^B\vec{\omega}^C \wedge [{}^B\vec{\omega}^C \wedge (P - O')]$$

- **Movimento de arrastamento:** movimento de P em relação a F, como se B e C fossem um corpo rígido único que se movimentasse em relação a F.

$$\vec{v}_{P_{arr}} = {}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P - O) \quad \boxed{O \in B}$$

$$\vec{a}_{P_{arr}} = {}^F\vec{a}_O + {}^F\vec{\alpha}^B \wedge (P - O) + {}^F\vec{\omega}^B \wedge [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P - O)]$$

- **“Acoplamento” dos movimentos:**

$$\vec{a}_{P_{Cor}} = 2({}^F\vec{\omega}^B \wedge {}^B\vec{v}_P) = 2(\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P_{rel}})$$

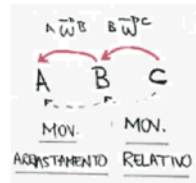
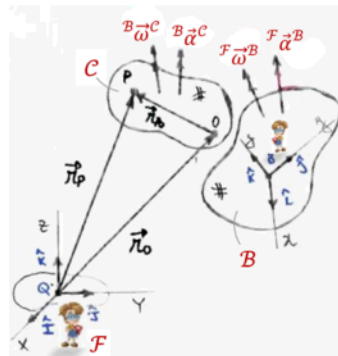
No caso de  $O = O'$ ,  
atenção que:

$${}^F\vec{v}_O \neq {}^B\vec{v}_O$$

$${}^F\vec{a}_O \neq {}^B\vec{a}_O$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{P_{abs}} &= \vec{v}_{P_{rel}} + \vec{v}_{P_{arr}} \\ \vec{a}_{P_{abs}} &= \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{arr}} + \vec{a}_{P_{Cor}} \end{aligned}$$

(10)



## ❑ Composição de Movimentos

### ➤ Composição com Dois Corpos Rígidos

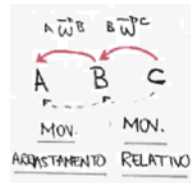
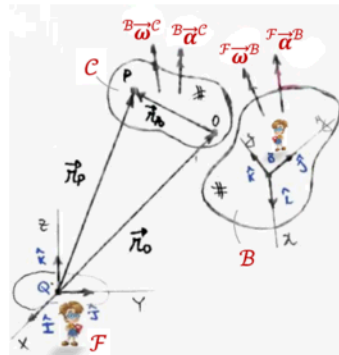
#### ▪ Composição de velocidades angulares

$$\underbrace{{}^F\vec{\omega}^C}_{\vec{\omega}_{abs}} = \underbrace{{}^B\vec{\omega}^C}_{\vec{\omega}_{rel}} + \underbrace{{}^F\vec{\omega}^B}_{\vec{\omega}_{arr}} \quad (11)$$

#### ▪ Composição de acelerações angulares

$$\underbrace{{}^F\vec{\alpha}^C}_{\vec{\alpha}_{abs}} = \underbrace{{}^B\vec{\alpha}^C}_{\vec{\alpha}_{rel}} + \underbrace{{}^F\vec{\alpha}^B}_{\vec{\alpha}_{arr}} + \underbrace{{}^F\vec{\omega}^B \wedge {}^B\vec{\omega}^C}_{\vec{\alpha}_{com}} \quad (12)$$

$$\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$







## Conteúdo

1. Introdução e Objetivos da Disciplina
2. Revisão de Cinemática
- 3. Revisão de Dinâmica**
4. Exercícios



## ❑ Motivação e Objetivos

- O estudo da dinâmica consiste na análise do movimento de sistemas (partículas, sistemas de partículas e corpos) no espaço sujeitos à ação de esforços (forças e momentos).
- O objetivo principal da dinâmica é determinar a evolução da configuração de sistemas no tempo dadas as suas propriedades de inércia, esforços ativos e condições iniciais.
- A análise dinâmica de sistemas é realizada por meio da **integração dos conceitos de Esforços (forças e momentos), Cinemática e Inércia**.
- A combinação dos conceitos de **Esforços, Cinemática e Inércia** dá origem às seguintes **Propriedades Dinâmicas** fundamentais:
  - Quantidade de Movimento ( $\vec{Q}$ )
  - Quantidade de Movimento Angular ( $\vec{H}_O$ )
  - Energia Cinética ( $E$ )
  - Trabalho ( $W$ )
  - Energia Potencial ( $U$ )



*Robôs utilizados na linha de montagem de automóveis (acima), e braço de robô executando uma variedade de movimentos no espaço (abaixo). Em ambos os casos, o estudo da dinâmica é importante para o desenvolvimento de sistemas de controle para o funcionamento adequado dos sistemas. Fonte [1].*