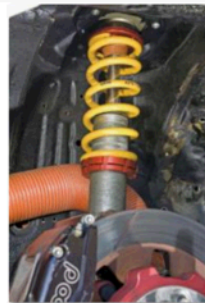
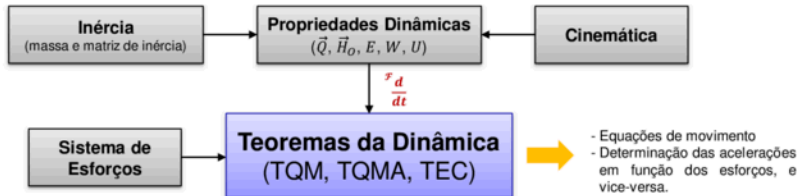


## ❑ Motivação e Objetivos

- A associação entre **Esforços e Variação Temporal das Propriedades Dinâmicas** dá origem aos seguintes **Teoremas da Mecânica de Newton-Euler**:
  - Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
  - Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMMA)
  - Teorema da Energia Cinética (TEC)
  - Teorema da Quantidade de Impulso (TQI)
  - Teorema do Momento dos Impulsos (TMI)
- Neste curso, se dará ênfase ao estudo da **dinâmica de corpos rígidos** baseada nos princípios da **Mecânica de Newton-Euler**.



Suspensão de um automóvel. As molas e amortecedores que compõem o sistema devem ser cuidadosamente selecionados para proporcionar dirigibilidade. Fonte [1].

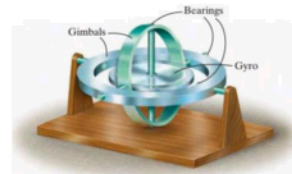
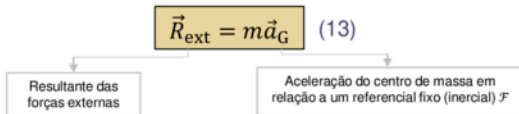


Ilustração de um giroscópio. Esse sistema é utilizado em sistemas de navegação inercial e em outros dispositivos de controle direcional e estabilização. Fonte [2].

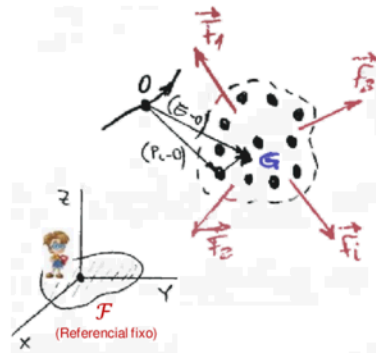
## ❑ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

### ➤ Sistemas de Partículas e Corpos Rígidos



### ➤ Observações:

- A Eq. (13) é válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Fisicamente, somente **forças externas** ao sistema podem provocar **variação no movimento de translação** do centro de massa do sistema.
- Caso  $\vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0}$ , o sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (1ª Lei de Newton).
- A **distribuição** de massa do sistema não influencia o movimento de translação do mesmo.
- O TQM (TMB ou TR) é geralmente utilizado para a determinação de esforços reativos em problemas de dinâmica de corpos rígidos.

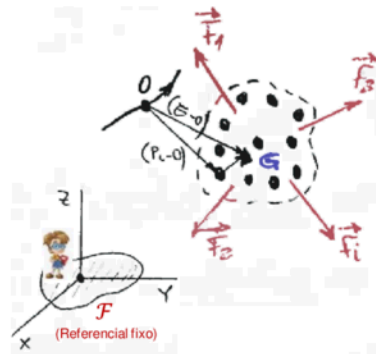


## ❑ Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMQM)

### ➤ Sistemas de Partículas

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} = m(\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O) + \vec{M}_O^{\text{ext}}, \quad \vec{H}_O = \sum_{i=1}^N m_i(\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{v}_i \quad (15)$$

- A expressão acima é válida para um polo  $O$  arbitrário.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, não é possível determinar  $\vec{H}_O$  em função das propriedades do centro de massa do sistema.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, é necessário conhecer os valores da massa, posição e velocidade de **cada partícula** para o cálculo de  $\vec{H}_O$ .
- A Eq. (15) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.



## Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMQM)

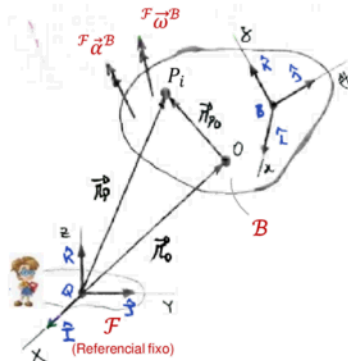
### Corpos Rígidos

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge {}^F\vec{a}_O + \frac{d}{dt}([\mathbf{I}]_O \{ {}^F\vec{\omega}^B \}) \quad (16)$$

- Admitindo que as grandezas vetoriais são expressas no sistema de coordenadas **Oxyz**( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ) **solidário a B**, e aplicando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial ao segundo termos do lado direito da Eq. 16, tem-se:

$$\begin{aligned} {}^F \frac{d}{dt}([\mathbf{I}]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}) &= \underbrace{{}^B \frac{d}{dt}([\mathbf{I}]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^B \})}_{= ([\mathbf{I}]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\alpha}^B \}), \text{ pois } Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \text{ é solidário ao corpo e, portanto, } [\mathbf{I}]_{Oxyz} \text{ é constante em } B.} + {}^F\vec{\omega}^B \wedge ([\mathbf{I}]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}) \end{aligned}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \underbrace{m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge {}^F\vec{a}_O}_{\text{Termo associado à aceleração do polo}} + \underbrace{[\mathbf{I}]_O \{ {}^F\vec{\alpha}^B \}}_{\text{Termo associado à aceleração angular do corpo}} + \underbrace{{}^F\vec{\omega}^B \wedge ([\mathbf{I}]_O \{ {}^F\vec{\omega}^B \})}_{\text{Momento Giroscópico ("momento das forças de inércia")}} \quad (17)$$



## ❑ Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMQM)

### ➤ Corpos Rígidos

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge {}^F\vec{a}_O + [\mathbf{I}]_O \{ {}^F\vec{\alpha}^B \} + {}^F\vec{\omega}^B \wedge ([\mathbf{I}]_O \{ {}^F\vec{\omega}^B \}) \quad (17)$$

- A Eq. 17 é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo  $\mathbf{O}$  deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ( $\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$ ).
- O sistema de coordenadas  $0xyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  deve ser solidário a  $\mathcal{B}$ , de forma que  $[\mathbf{I}]_{0xyz}$  seja constante no tempo.
- Em **problemas planos** (plano  $0xy$ ), a Eq. 17 é simplificada:

$$\begin{aligned} {}^F\vec{\omega}^B &= \omega \hat{k} \\ {}^F\vec{\alpha}^B &= \alpha \hat{k} \\ J_{Oxz} &= J_{Oyz} = 0 \\ \dot{\hat{k}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

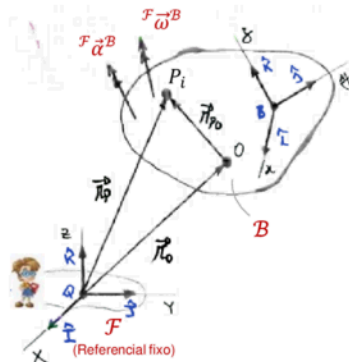


$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge {}^F\vec{a}_O + (J_{Oz}\alpha)\hat{k} \quad (18)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{G} \text{ e/ou} \\ {}^F\vec{a}_O &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = (J_{Oz}\alpha)\hat{k} \quad (19)$$



## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Sistemas de Partículas

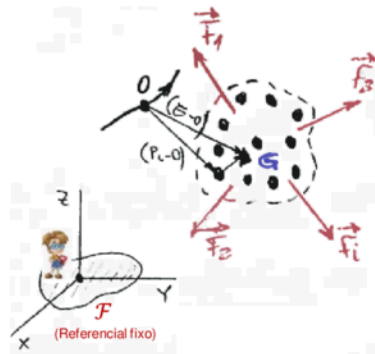
$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= W^{1 \rightarrow 2} \\ W^{1 \rightarrow 2} &= W_{\text{ext}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{int}}^{1 \rightarrow 2} \end{aligned} \quad (20)$$

- A Eq. (20) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Note que o trabalho total realizado no sistema é composto pela soma do trabalho das forças internas e externas atuantes no sistema.
- Admitindo que os esforços internos e externos podem ser distinguidos em **conservativos** e **não-conservativos** para o cálculo do trabalho total, e considerando a definição de energia potencial, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 &= W_{\text{nc}}^{1 \rightarrow 2} \\ \mathcal{E} &= E + U_{\text{ext}} + U_{\text{int}} \\ W_{\text{nc}}^{1 \rightarrow 2} &= W_{\text{ext, nc}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{int, nc}}^{1 \rightarrow 2} \end{aligned} \quad (21)$$

- Teorema da Energia Mecânica (TEM)

-  $\mathcal{E}$ : energia mecânica



## Teorema da Energia Cinética (TEC)

### Corpos Rígidos

- Devido à propriedade de rigidez do corpo rígido,  $W_{\text{int}}^{1 \rightarrow 2} = 0$ . Logo:

$$E_2 - E_1 = W_{\text{ext}}^{1 \rightarrow 2} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = W_{\text{ext, nc}}^{1 \rightarrow 2}, \quad \mathcal{E} = E + U_{\text{ext}} \quad (22)$$

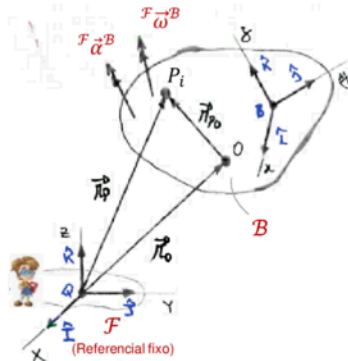
- A energia potencial gravitacional deve ser calculada em relação à posição do centro de massa do corpo.
- A energia cinética pode ser calculada a partir da expressão geral:

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} ({}^F \vec{v}_0 \cdot {}^F \vec{v}_0)}_{\text{Translação pura do polo O}} + \underbrace{m {}^F \vec{v}_0 \cdot [{}^F \vec{\omega}^B \wedge (G - O)]}_{\text{Roto-translação de G em torno do polo O}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ {}^F \vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}]_O \{ {}^F \vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno do polo O}} \quad (23)$$

Translação pura do  
polo O

Roto-translação de G  
em torno do polo O

Rotação pura em  
torno do polo O



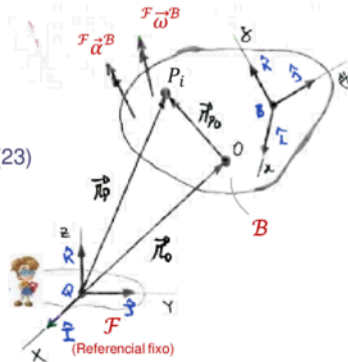
## Teorema da Energia Cinética (TEC)

### Corpos Rígidos

- A energia cinética pode ser calculada a partir da expressão geral:

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} (\mathcal{F}\vec{v}_O \cdot \mathcal{F}\vec{v}_O)}_{\text{Translação pura do polo } O} + \underbrace{m \mathcal{F}\vec{v}_O \cdot [\mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge (G - O)]}_{\text{Roto-translação de } G \text{ em torno do polo } O} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}]_O \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno do polo } O} \quad (23)$$

- A Eq. (22) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo  $O$  deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ( $\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$ ).
- O sistema de coordenadas  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  é, em geral, solidário a  $\mathcal{B}$ , de forma que  $[\mathbf{I}]_{Oxyz}$  seja constante no tempo.
- O valor da energia cinética **independe** do polo e do sistema de coordenadas escolhidos para seu cálculo. A energia cinética é uma grandeza escalar.





## Teorema da Energia Cinética (TEC)

### Corpos Rígidos

- A energia cinética pode ser calculada a partir da expressão geral:

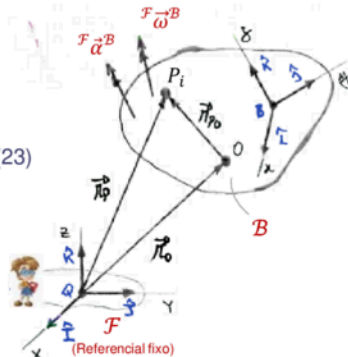
$$E = \underbrace{\frac{m}{2} (\mathcal{F}\vec{v}_O \cdot \mathcal{F}\vec{v}_O)}_{\text{Translação pura do polo } O} + \underbrace{m \mathcal{F}\vec{v}_O \cdot [\mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge (G - O)]}_{\text{Roto-translação de } G \text{ em torno do polo } O} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}]_O \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno do polo } O} \quad (23)$$

- No caso particular de  $O = G$ :

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} (\mathcal{F}\vec{v}_G \cdot \mathcal{F}\vec{v}_G)}_{\text{Translação pura de } G} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}]_G \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno de } G} \quad (24)$$

- No caso particular de  $\mathcal{F}\vec{v}_O = \vec{0}$ :

$$E = \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}]_O \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \} \quad (25)$$



## Teorema da Energia Cinética (TEC)

### Corpos Rígidos

- A energia cinética deve ser calculada a partir da expressão geral:

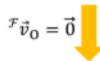
$$E = \underbrace{\frac{m}{2} (\mathcal{F}\vec{v}_O \cdot \mathcal{F}\vec{v}_O)}_{\text{Translação pura do polo } O} + \underbrace{m \mathcal{F}\vec{v}_O \cdot [\mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge (G - O)]}_{\text{Roto-translação de } G \text{ em torno do polo } O} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}]_O \{ \mathcal{F}\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno do polo } O} \quad (23)$$

- Em **problemas planos** (plano  $Oxy$ ), a Eq. 23 é simplificada:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\vec{\omega}^B &= \omega \hat{k} \\ J_{Oxz} = J_{Oyz} &= 0 \end{aligned} \quad E = \frac{m}{2} (\mathcal{F}\vec{v}_O \cdot \mathcal{F}\vec{v}_O) + m \mathcal{F}\vec{v}_O \cdot [\mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge (G - O)] + \frac{J_{Oz}\omega^2}{2} \quad (26)$$



$$E = \frac{m}{2} (\mathcal{F}\vec{v}_G \cdot \mathcal{F}\vec{v}_G) + \frac{J_{Gz}\omega^2}{2}$$



$$E = \frac{J_{Oz}\omega^2}{2}$$

