Al1f – FACTORISATION D'UN POLYNÔME ET RACINES

TI-89 – Voyage™ 200

Mots-clés : racines, polynômes, factorisation, division.

1. Objectif

Mettre en évidence la relation entre racines et factorisation d'un polynôme.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

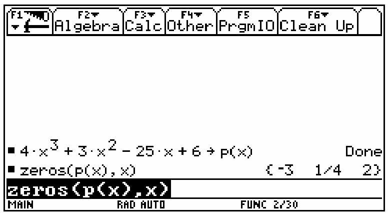
3. Commentaires

La factorisation d'un polynôme est un point central de l'algèbre, et la mise en évidence de la relation étroite qui existe entre les racines éventuelles et la factorisation se démontre de façon classique par factorisation de l'expression $P(x) - P(a)$.
L'idée maîtresse de cette activité est d'analyser les résultats produits par la calculatrice et de faire apparaître un questionnement à partir des différents résultats. Les calculs sont réalisés uniquement par l'outil ce qui permet de consacrer le temps de recherche uniquement au raisonnement.
Le cas général d'un polynôme de degré 3 pourra être proposé comme prolongement de l'activité en redéfinissant le polynôme $P(x)$ sous la forme $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \to P(x)$, puis en exécutant la séquence **F2 3 : Expand (**$P(x) / (x - a)$**)**.

4. Mise en œuvre

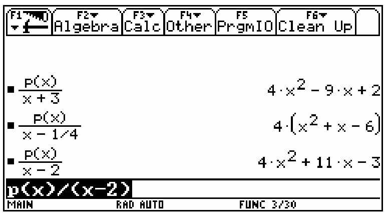
Expression de $P(x) / (x - a)$ pour des valeurs particulières de a (questions 1 à 3)

Définir le polynôme $P(x)$ à l'aide de la séquence :
$4x^3 + 3x^2 - 25x + 6$ **STO>** $P(x)$
Il est possible d'obtenir directement les racines réelles à l'aide de l'option **4: zeros** du menu **F2** (*écran* 1).

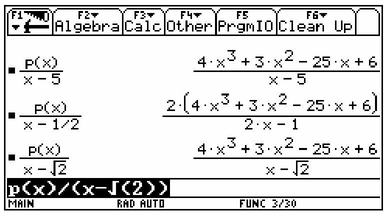


écran 1

Les écrans suivants sont obtenus en tapant dans la barre d'entrée les différentes séquences proposées dans l'énoncé élève.



écran 2

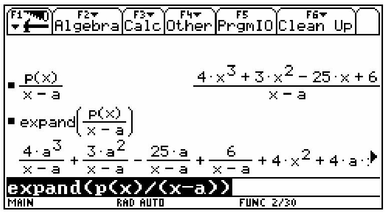


écran 3

Étude du cas général (questions 4 et 5)

Dans le cas général, où a est un réel quelconque, la solution du problème réside dans la reconnaissance de $P(a)$ à l'intérieur de l'expression (*écran* 4) ; en effet, on obtient ainsi l'existence d'un polynôme Q_a tel que, pour tout $x \neq a$,

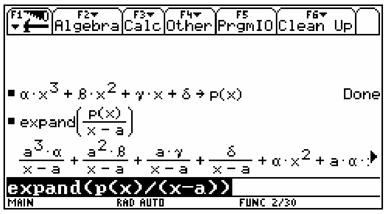
$$P(x) = \frac{P(a)}{x-a} + Q_a(x).$$



écran 4

5. Prolongement

Dans l'*écran* 5, figurent les résultats obtenus pour un polynôme quelconque de degré 3.



écran 5

Al1f – FACTORISATION D'UN POLYNÔME ET RACINES

On considère le polynôme $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 25x + 6$.

1) Étudier les variations de P et dresser son tableau de variations.

2) Montrer que $P(x)$ admet seulement trois racines : -3, $\frac{1}{4}$ et 2.

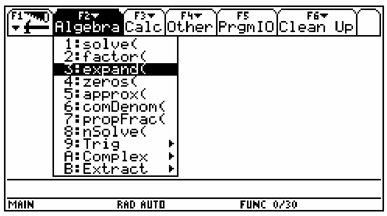
3) Avec la calculatrice, exécuter les séquences suivantes :

$4x^3 + 3x^2 - 25x + 6$ **STO>** $P(x)$
$P(x) / (x + 3)$ **ENTER**
$P(x) / (x - 1/4)$ **ENTER**
$P(x) / (x - 2)$ **ENTER**

Puis exécuter les séquences :
$P(x) / (x - 5)$ **ENTER**
$P(x) / (x - 1/2)$ **ENTER**
$P(x) / (x - \sqrt{2})$ **ENTER**

Quelle conjecture peut-on avancer concernant la division de $P(x)$ par $(x - a)$? On pourra envisager deux cas : a est racine de $P(x)$ et a n'est pas racine de $P(x)$.

4) Exécuter les séquences : $P(x) / (x - a)$ **ENTER**
F2 3 : expand ($P(x) / (x - a)$**) ENTER**
A l'aide du résultat obtenu, démontrer la conjecture établie au **3)**.



5) En déduire une factorisation de $P(x)$ et vérifier l'expression trouvée à l'aide de la calculatrice avec la séquence **F2 2 : factor(**$P(x)$, x).