



□ Distribuição de Massa

➤ Eixos Principais e Centrais de Inércia

- Conhecendo a matriz de inércia $[I]_{Oxyz}$, os eixos e momentos principais de inércia podem ser obtidos pelo processo de diagonalização da matriz (problema do autovalor e autovetor):

- **Construção do Problema:**

$$[I]_{Oxyz}\{\vec{u}\} = \lambda\{\vec{u}\} \Rightarrow ([I]_{Oxyz} - \lambda[I])\{\vec{u}\} = \{\vec{0}\}$$

λ : autovalores
 \vec{u} : autovetores

- **Solução não-Trivial:**

$$\det([I]_{Oxyz} - \lambda[I]) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 0 \text{ (polinômio característico de 3ª ordem)}$$

- **Resultado Final:**

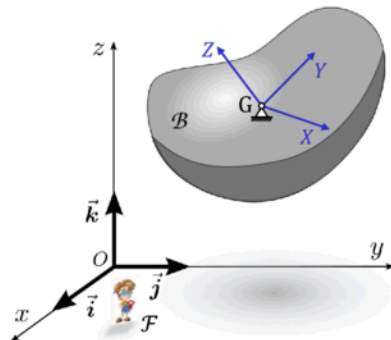
Autovalores: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \triangleq (J_{Ox}, J_{Oy}, J_{Oz})$, momentos principais de inércia.

Autovetores: $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \triangleq (\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, versores dos eixos principais de inércia.

❑ Movimento Rotacional de Corpos Rígidos

➤ Rotação em Torno de um Ponto Fixo

- Corpo rígido \mathcal{B} articulado no centro de massa G .
- Sistema de coordenadas $GXYZ(\hat{e}_X, \hat{e}_Y, \hat{e}_Z)$ solidário ao corpo, com eixos alinhados aos eixos centrais principais de inércia.
- Ausência de momentos externos aplicados no corpo ("*torque-free rotation*").
- Corpo sujeito a uma quantidade de movimento angular \vec{H}_{G_0} constante (momentos externos nulos) imposta por um impulso de momento.
- Como nenhum momento externo é aplicado, a quantidade de movimento angular é conservada (módulo e orientação constantes). O vetor \vec{H}_{G_0} é estacionário em relação ao referencial fixo \mathcal{F} .
- O corpo irá rotacionar em torno do seu centro de massa.

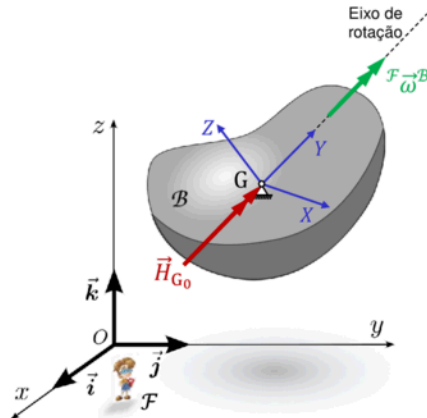




❑ Movimento Rotacional de Corpos Rígidos

➤ Rotação em Torno de um Ponto Fixo

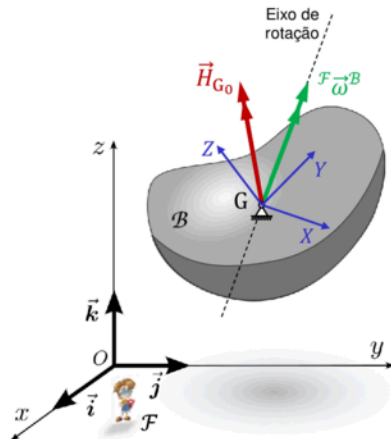
- Se \vec{H}_{G_0} é **paralelo** a algum dos eixos centrais principais de inércia: o corpo tende a permanecer girando em torno do eixo principal de inércia correspondente. Ou seja, o eixo de rotação do corpo **permanece paralelo** ao eixo principal de inércia e a \vec{H}_{G_0} .



❑ Movimento Rotacional de Corpos Rígidos

➤ Rotação em Torno de um Ponto Fixo

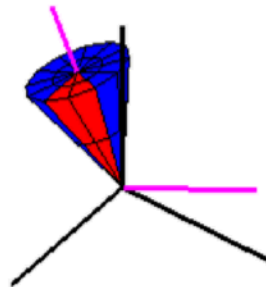
- Se \vec{H}_{G_0} é **paralelo** a algum dos eixos centrais principais de inércia: o corpo tende a permanecer girando em torno do eixo principal de inércia correspondente. Ou seja, o eixo de rotação do corpo **permanece paralelo** ao eixo principal de inércia e a \vec{H}_{G_0} .
- Se \vec{H}_{G_0} **não é paralelo** a algum dos eixos centrais principais de inércia: o corpo tende a girar em torno de todas direções principais de inércia devido ao efeito giroscópico (rotação composta). Ou seja, o eixo de rotação do corpo **não permanece paralelo** a nenhum eixo principal de inércia e a \vec{H}_{G_0} , porém a magnitude da velocidade angular permanece constante.
- Quando o eixo de rotação **não coincide** com nenhum dos eixos centrais principais de inércia, o corpo tende a rotacionar em torno de todos os eixos de inércia (rotação composta).



❑ Movimento Rotacional de Corpos Rígidos

➤ Rotação em Torno de um Ponto Fixo

- Se \vec{H}_{G_0} é **paralelo** a algum dos eixos centrais principais de inércia: o corpo tende a permanecer girando em torno do eixo principal de inércia correspondente. Ou seja, o eixo de rotação do corpo **permanece paralelo** ao eixo principal de inércia e a \vec{H}_{G_0} .
- Se \vec{H}_{G_0} **não é paralelo** a algum dos eixos centrais principais de inércia: o corpo tende a girar em torno de todas direções principais de inércia devido ao efeito giroscópico (rotação composta). Ou seja, o eixo de rotação do corpo **não permanece paralelo** a nenhum eixo principal de inércia e a \vec{H}_{G_0} , porém a magnitude da velocidade angular permanece constante.
- Quando o eixo de rotação **não coincide** com nenhum dos eixos centrais principais de inércia, o corpo tende a rotacionar em torno de todos os eixos de inércia (rotação composta).

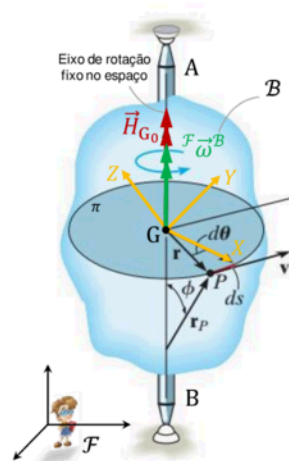


Exemplos de corpos em rotação pura em torno de um ponto fixo. Fonte [3].

❑ Movimento Rotacional de Corpos Rígidos

➤ Rotação em Torno de um Eixo Fixo

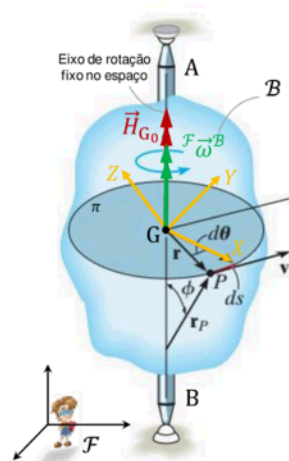
- Corpo rígido \mathcal{B} apoiado nos mancais A e B. O corpo é livre para girar em torno do eixo entre mancais fixo no espaço (eixo de rotação fixo).
- Sistema de coordenadas $GXYZ(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ solidário ao corpo, com eixos alinhados aos eixos centrais principais de inércia.
- Ausência de momentos externos aplicados no corpo (“*torque-free rotation*”).
- Corpo sujeito a uma quantidade de movimento angular \vec{H}_{G_0} constante (momentos externos nulos) imposta por um impulso de momento. Como o eixo de rotação é fixo no espaço, $\vec{H}_{G_0} \parallel {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$.
- Como nenhum momento externo é aplicado, a quantidade de movimento angular é conservada (módulo e orientação constantes). O vetor $\vec{H}_{G_0} \parallel {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ é estacionário em relação ao referencial fixo \mathcal{F} .
- O corpo irá rotacionar em torno do seu eixo de rotação. (E se não houve os mancais?)



❑ Movimento Rotacional de Corpos Rígidos

➤ Rotação em Torno de um Eixo Fixo

- Eixo de rotação **coincidente** com o eixo central principal de inércia longitudinal: o corpo permanecerá girando em torno do eixo de rotação sem a geração de esforços nos mancais.
- Eixo de rotação **não coincidente** com eixo central principal de inércia longitudinal: o corpo **tenderá** a girar em outras direções devido ao efeito giroscópico, ou seja, o eixo de rotação **tenderia** a mudar se não houvesse os mancais.
 - Como o eixo de rotação é fixo, esforços reativos dinâmicos são gerados nos mancais de forma a contrabalançar o momento giroscópico produzido pelo desalinhamento entre o eixo de rotação e o eixo central principal de inércia longitudinal do corpo.
 - São os esforços dinâmicos nos mancais que fazem com que o corpo permaneça girando em torno do eixo de rotação fixo.
- Se o corpo girante não é simétrico em torno do eixo de rotação, a velocidade angular do corpo flutua (rotação em torno de ponto fixo) ou esforços reativos dinâmicos são gerados nos mancais (rotação em torno de eixo fixo).





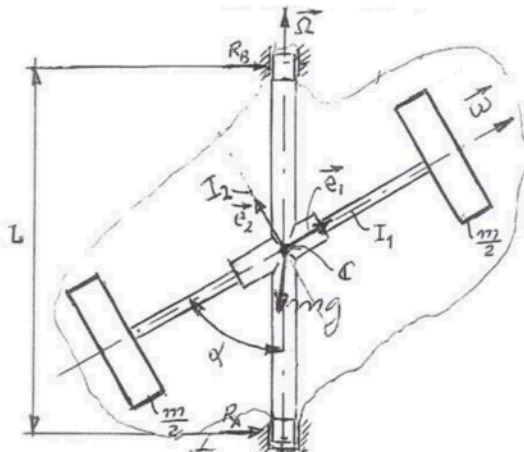
Conteúdo

1. Introdução e Objetivos da Disciplina
2. Revisão de Cinemática
3. Revisão de Dinâmica
- 4. Exercícios**

Exercício

Considere o sistema formado por dois discos dispostos simetricamente como ilustrado na figura, que giram com velocidade angular ω (constante) em relação à cruzeta de arraste. Ao mesmo tempo, a cruzeta gira com velocidade angular Ω (constante) em torno de um eixo vertical. A massa da estrutura de arraste é desprezível face a massa m dos discos, que possuem momento de inércia I_1 em relação a seu eixo de rotação, e I_2 a um eixo ortogonal por C .

Deseja-se calcular as forças de reações radiais nos mancais **A** e **B** que distam L entre si.





PME3400 – Vibrações

Fundamentos de Dinâmica de Rotores

Prof. Francisco J. Profito

fprofito@usp.br