



## **PME3400 – Vibrações**

# **Introdução e Revisão de Dinâmica**

Prof. Francisco J. Profito

[fprofito@usp.br](mailto:fprofito@usp.br)



## Conteúdo

1. Introdução e Objetivos da Disciplina
2. Revisão de Cinemática
3. Revisão de Dinâmica
4. Exercícios



# Conteúdo

- 1. Introdução e Objetivos da Disciplina**
2. Revisão de Cinemática
3. Revisão de Dinâmica
4. Exercícios



## ❑ Introdução e Objetivos da Disciplina

➤ Disciplina dividida em 3 partes (ver programa da disciplina no Moodle):

- Revisão de Dinâmica de Sistemas e Fundamentos de Dinâmica e Balanceamento de Rotores
- Vibrações de Sistemas com 1 Grau de Liberdade
- Vibrações de Sistemas com Vários Graus de Liberdade

Francisco Profito

➤ Critério de avaliação:  $MF = 0,75 \left[ \frac{(2P1+3P2+5P3)}{10} \right] + 0,25 \left( \frac{\sum E_i}{n} \right)$

➤ Prova substitutiva 'fechada' (permitida somente para quem **não** fez a P1, P2 e/ou P3).

- P1: 11/04
- P2: 21/05
- P3: 27/06
- PSUB: 04/07
- PREC: 25/07

➤ Bibliografia:

- Nigro, Apostila de Revisão de Dinâmica de Sistemas.
- Nigro, Apostila de Balanceamento de Rotores.
- Vierck, Vibration Analysis 2nd edition.
- Notas de aulas e bibliografia complementar no Moodle da disciplina.



## ❑ Introdução e Objetivos da Disciplina

- Disciplina de caráter **CONCEITUAL e de FORMAÇÃO**, porém serão apresentados problemas de Vibrações de Sistemas Mecânicos mais próximos do mundo real.
- Aprendizado de noções básicas de Vibrações Lineares de Sistemas Mecânicos.
- Introdução à dinâmica e balanceamento de rotores.
- Capacitação em modelagem matemática e análise de sistemas discretos com um ou mais graus de liberdade sujeitos a excitações mecânicas.
- Familiarização com sistemas de supressão de vibração.
- Introdução à vibração de sistemas contínuos.
- Carga didática relativamente baixa (4 créditos) em relação ao conteúdo da disciplina.



## Conteúdo

1. Introdução e Objetivos da Disciplina

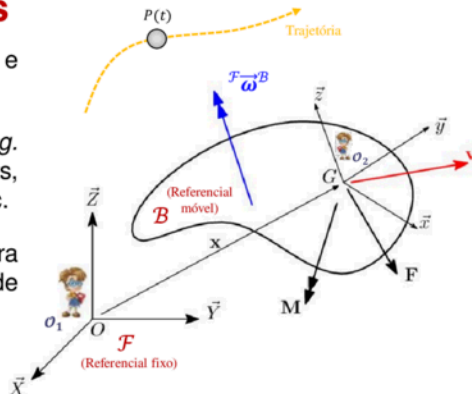
**2. Revisão de Cinemática**

3. Revisão de Dinâmica

4. Exercícios

## ❑ Referenciais e Sistemas de Coordenadas

- **Cinemática:** estudo da descrição **geométrica** do movimento e independente das causas do movimento.
- **Referencial:** objeto rígido a partir do qual eventos físicos (e.g. movimento de uma partícula no espaço) são observados, “percebidos” ou descritos por um observador. Notação:  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , etc.
- **Sistema de Coordenadas:** ferramenta analítica utilizada para **representar a descrição** de eventos físicos (e.g. movimento de uma partícula no espaço) a partir de um dado referencial.
  - Um dado sistema de coordenadas é **fixo a um único** referencial
  - Definição de sistema de coordenadas:
    - Origem (e.g.,  $G$ ); ponto pertencente a um dado referencial;
    - Eixos coordenados (e.g.,  $Gx, Gy, Gz$ );
    - Base de versores alinhados aos eixos coordenados (e.g.,  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ );
    - Notação:  $\mathbb{B} = Gxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$
- Referencial  $\neq$  Sistema de coordenadas



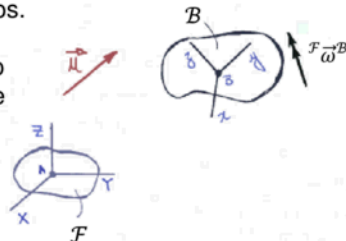
- ${}^F\vec{v}_P$  e  ${}^F\vec{a}_P$ : velocidade e aceleração do ponto  $P$  em relação a  $\mathcal{F}$ , isto é, a velocidade e aceleração de  $P$  **medidas** por um observador **fixo** ao referencial  $\mathcal{F}$ .
- A velocidade e aceleração de um ponto em relação a um dado referencial podem ser **representadas** (ou expressas) em um sistema de coordenadas fixo a **outro** referencial.

## Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial

- Considere dois referenciais  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{B}$  que se movem arbitrariamente no espaço com velocidade angular instantânea  ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ . Os referenciais podem ser corpos rígidos.
- Seja um vetor  $\vec{u}(t)$  **qualquer livre no espaço**, cujo módulo e orientação podem variar no tempo. Representando esse vetor em um sistema de coordenadas  $\mathbb{B} = Bxyz(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$  **solidário**  $\mathcal{B}$ , tem-se:

$$\vec{u}(t) = u_1(t)\hat{b}_1 + u_2(t)\hat{b}_2 + u_3(t)\hat{b}_3$$

- A derivada temporal de  $\vec{u}(t)$  em relação ao referencial  $\mathcal{F}$  é dada por:



Variação de  $\vec{u}(t)$  em relação a  $\mathcal{F}$

$${}^{\mathcal{F}}\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{{}^{\mathcal{B}}\frac{d\vec{u}}{dt}}_{\text{Variação de } \vec{u}(t) \text{ em relação a } \mathcal{B}} + \underbrace{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{u}}_{\text{Variação da orientação do sistema de coordenadas } Bxyz(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3) \text{ em relação a } \mathcal{F} \text{ devido a rotação de } \mathcal{B} \text{ (arrastamento)}} \quad (1)$$

- Variação de  $\vec{u}(t)$  em relação a  $\mathcal{B}$ . Apenas a variação temporal das componentes  $u_i(t)$  é considerada:

$${}^{\mathcal{B}}\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_1\hat{b}_1 + \dot{u}_2\hat{b}_2 + \dot{u}_3\hat{b}_3$$

- Variação relativa de  $\vec{u}(t)$  em relação a  $\mathcal{B}$ .

- As derivadas dos versores  $\hat{b}_i$  em relação a  $\mathcal{F}$  são consideradas implicitamente:

$${}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_i = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_i \Rightarrow \begin{cases} {}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_1 = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_1 \\ {}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_2 = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_2 \\ {}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_3 = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_3 \end{cases}$$

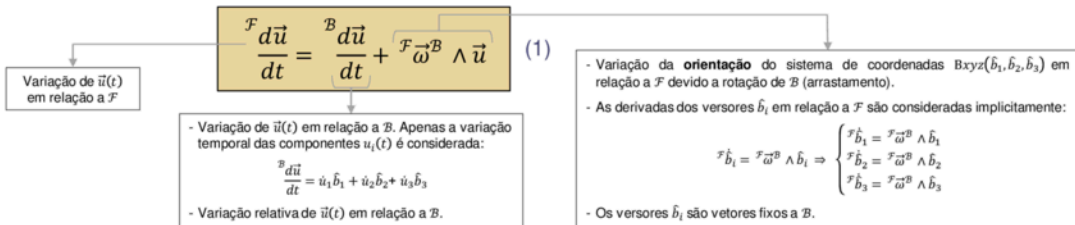
- Os versores  $\hat{b}_i$  são vetores fixos a  $\mathcal{B}$ .





## Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial

- A derivada temporal de  $\vec{u}(t)$  em relação ao referencial  $\mathcal{F}$  é dada por:



- A derivada temporal de um vetor  $\vec{u}(t)$  depende do referencial a partir do qual a derivada é calculada.
- A Eq. 1 é especialmente útil quando  $\vec{u}(t)$  é expresso em um sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{B}$ .
- O vetor  $\vec{u}(t)$  pode representar qualquer grandeza física (posição, velocidade, quantidade de movimento, quantidade de movimento angular, etc.)

## ❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

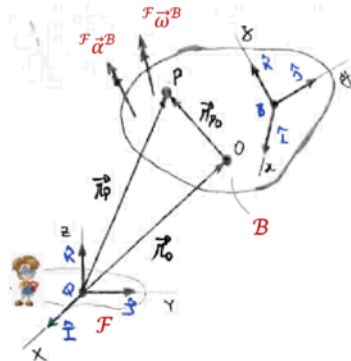
- Seja um corpo rígido  $B$  que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular  ${}^F\vec{\omega}^B$  e aceleração angular  ${}^F\vec{\alpha}^B$  em relação a um referencial fixo  $F$ .

- **Campo de Velocidades**

$${}^F\vec{v}_P = {}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P - O) \quad (2)$$

- **Campo de Acelerações**

$${}^F\vec{a}_P = {}^F\vec{a}_O + {}^F\vec{\alpha}^B \wedge (P - O) + {}^F\vec{\omega}^B \wedge [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P - O)] \quad (3)$$



- Dados  ${}^F\vec{v}_O$ ,  ${}^F\vec{a}_O$ ,  ${}^F\vec{\omega}^B$  e  ${}^F\vec{\alpha}^B$ , as Eqs. 2 e 3 permitem calcular a velocidade e aceleração de **qualquer** ponto  $P \in B$ .