

## ❑ Distribuição de Massa

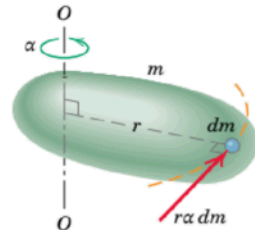
- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento rotacional**.

### ➤ Momento de Inércia

- Medida da distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de um eixo específico**.
- Fisicamente, representa a medida da “resistência” de um sistema em ter seu movimento de rotação em torno de um eixo alterado (inércia de rotação).
- Por definição, o momento de inércia de um sistema (ou corpo) em relação a um eixo  $Ou$  arbitrário é dado por:

$$J_{Ou} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Ou} = \int r^2 \rho dV \quad (27)$$

- Grandeza escalar
- Unidade:  $\text{kg.m}^2$
- $J_{Ou} \geq 0$



## ❑ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento rotacional**.

➤ **Momento de Inércia**

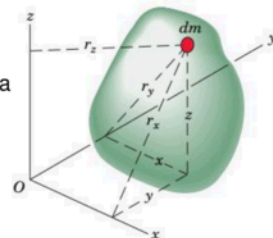
- Considerando um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados do sistema podem ser escritos, como segue:

$$J_{Ox} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad \Rightarrow \quad J_{Ox} = \int (y^2 + z^2) \rho dV$$

$$J_{Oy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad \Rightarrow \quad J_{Oy} = \int (x^2 + z^2) \rho dV$$

$$J_{Oz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \Rightarrow \quad J_{Oz} = \int (x^2 + y^2) \rho dV$$

(28)



Para figuras no plano  $Oxy$ :

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy}$$

## ❑ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento rotacional**.

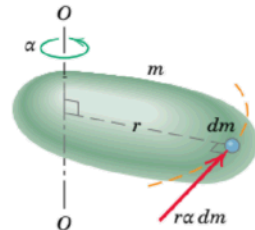
### ➤ Produto de Inércia

- Medida da distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em relação a um plano específico**.
- Por definição, o produto de inércia de um sistema (ou corpo) em relação a um plano  $Ouv$  arbitrário é dado por:

$$J_{Ouv} = \sum_{i=1}^N m_i u_i v_i \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad J_{Ouv} = \int (uv) \rho dV \quad (29)$$

- Grandeza escalar
- Unidade:  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
- $J_{Ouv} \geq 0$  ou  $J_{Ouv} \leq 0$

Onde  $u_i$  e  $v_i$  são as coordenadas de cada partícula  $P_i$  no plano  $Ouv$ .



## ❑ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento rotacional**.

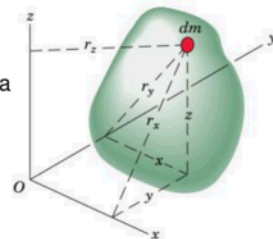
➤ **Produto de Inércia**

- Considerando um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , os produtos de inércia em relação aos planos coordenados do sistema podem ser escritos, como segue:

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oxy} = \int (xy) \rho dV$$

$$J_{Oxz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oxz} = \int (xz) \rho dV$$

$$J_{Oyz} = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oyz} = \int (yz) \rho dV$$



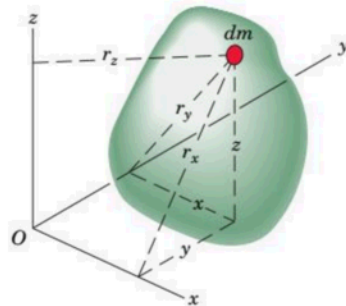
- (30) - Para figuras no plano  $Oxy$ :  $J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0$   
- Os produtos de inércia são simétricos:  
 $J_{Oxy} = J_{Oyx}$  ;  $J_{Oxz} = J_{Ozx}$  ;  $J_{Oyz} = J_{Ozy}$

## □ Distribuição de Massa

### ➤ Tensor de Inércia

- O tensor de inércia reúne as informações relacionadas à distribuição de massa de um sistema ou corpo em torno de um ponto no espaço.
- A **representação matricial** do tensor de inércia com respeito a um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  é dada por:

$$[\mathbf{I}]_{Oxyz} = \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \quad (31)$$



- $[\mathbf{I}]_{Oxyz}$  representa a distribuição de massa de um sistema ou corpo em torno da origem do sistema de coordenadas  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ .
- Em dinâmica de corpos rígidos, o sistema de coordenadas  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  é geralmente solidário ao corpo, de forma que  $[\mathbf{I}]_{Oxyz}$  permaneça constante no tempo.
- O tensor (ou matriz) de inércia é simétrico e positivo-definido.

## ❑ Distribuição de Massa

### ➤ Transformação de Coordenadas

- Em diversas situações, é desejável avaliar a matriz de inércia de um sistema ou corpo com respeito a diferentes sistemas de coordenadas com origens e orientações distintas.

$$[I]_{Oxyz} \stackrel{?}{\Rightarrow} [I]_{O'x'y'z'}$$

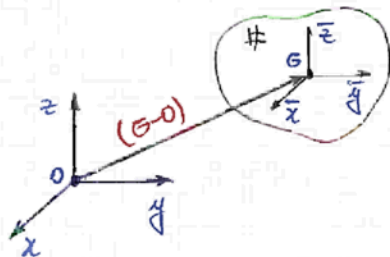
#### ▪ Translação de Eixos (Teorema dos Eixos Paralelos)

- Essa transformação consiste em correlacionar os momentos e produtos de inércia entre dois sistemas de coordenadas **transladados** entre si.
- Os sistemas de coordenadas possuem a mesma orientação e origens distintas. Seja:

$G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ): solidário ao centro de massa do corpo

$Oxyz$  ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ), tal que  $x \parallel \bar{x}$ ,  $y \parallel \bar{y}$  e  $z \parallel \bar{z}$ .

$(G - O) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$  (expresso no sistema  $Oxyz$  ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ))



## □ Distribuição de Massa

### ➤ Transformação de Coordenadas

#### ▪ Translação de Eixos (Teorema dos Eixos Paralelos)

- Nestas condições, é possível demonstrar que:

$$\begin{aligned} J_{Ox} &= J_{G\bar{x}} + md_{x\bar{x}}^2 \\ J_{Oxy} &= J_{G\bar{x}\bar{y}} + mab \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

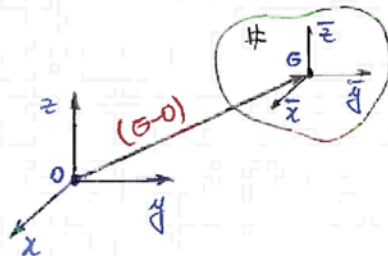
$$\begin{aligned} J_{G\bar{x}} &= J_{Ox} - md_{x\bar{x}}^2 \\ J_{G\bar{x}\bar{y}} &= J_{Oxy} - mab \end{aligned}$$

$d_{x\bar{x}}^2$ : distância entre os eixos  $Ox$  e  $G\bar{x}$  ( $d_{x\bar{x}}^2 = b^2 + c^2$ )

$a, b, c$ : coordenadas de  $G$  no sistema  $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ .

- As transformações para os outros momentos e produtos de inércia são análogas. Generalizando:

$$[I]_{Oxyz} = [I]_{G\bar{x}\bar{y}\bar{z}} + \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$



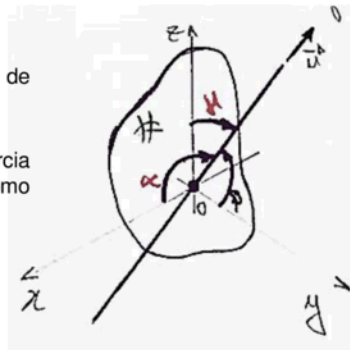
## □ Distribuição de Massa

### ➤ Transformação de Coordenadas

#### ▪ Rotação de Eixos

- Essa transformação consiste em correlacionar os momentos e produtos de inércia entre dois sistemas de coordenadas **rotacionados** entre si.
- Conhecendo o tensor de inércia  $[\mathbf{I}]_O$ , é possível determinar o momento de inércia do sistema ou corpo em relação a um eixo arbitrário  $(O, \vec{u})$  passante por  $O$ , como segue:

$$J_{Ou} = \{\vec{u}\}^T [\mathbf{I}]_O \{\vec{u}\} \xrightarrow{\text{Oxyz}(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})} \begin{cases} J_{Ou} = \{\vec{u}\}^T [\mathbf{I}]_{\text{Oxyz}} \{\vec{u}\} \\ \vec{u} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k} \end{cases}$$



- Portanto, conclui-se que os elementos da matriz de inércia, em geral, variam se os eixos coordenados são rotacionados em torno de  $O$ .



## □ Distribuição de Massa

### ➤ Transformação de Coordenadas

#### ▪ Rotação de Eixos

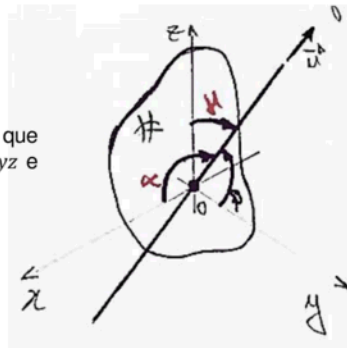
- Dessa forma, combinando as rotações em torno de  $O$ , é possível demonstrar que a transformação da matriz de inércia entre os sistemas de coordenadas  $Oxyz$  e  $Ox'y'z'$ , rotacionados entre si, é dada por:

$$[I]_{Ox'y'z'} = [R]^T [I]_{Oxyz} [R]$$

$[R]$ : matriz de rotação de  $Ox'y'z'$  em relação à  $Oxyz$ .

#### ▪ Observações

- A **translação de eixos** permite apenas a mudança de **origem** do sistema de coordenadas com respeito ao qual a matriz de inércia é definida. As **orientações** dos sistemas permanecem as mesmas.
- A **rotação de eixos** permite apenas a mudança de **orientação** do sistema de coordenadas com respeito ao qual a matriz de inércia é definida. As **origens** dos sistemas permanecem as mesmas.
- Quando se deseja alterar, simultaneamente, a origem e a orientação do sistema de coordenadas, as transformações devem ser aplicadas em sequência.





## ❑ Distribuição de Massa

### ➤ Eixos Principais e Centrais de Inércia

- As transformações de coordenadas anteriores demonstram que a matriz de inércia referente a um ponto arbitrário O varia de acordo com a rotação do sistema de coordenadas Oxyz em torno da origem O.
- Dessa forma, pode-se vislumbrar a existência de um sistema de coordenadas, com origem em O, tal que a matriz de inércia associada seja diagonal, ou seja, com produtos de inércia nulos. Matematicamente:

$$[I]_{OXYZ} = \begin{bmatrix} J_{OX} & 0 & 0 \\ 0 & J_{OY} & 0 \\ 0 & 0 & J_{OZ} \end{bmatrix}$$

OX, OY, OZ: **Eixos Principais de Inércia.**

$J_{OX}, J_{OY}, J_{OZ}$ : **Momentos Principais de Inércia.**

- É importante ressaltar que, para todo ponto O associado a um sistema ou corpo, existe um único conjunto de eixos e momentos principais de inércia.
- Quando o ponto em questão é o **centro de massa** do sistema ou corpo, define-se os eixos e momentos **centrais** principais de inércia:

GX, GY, GZ: **Eixos Centrais Principais de Inércia.**

$J_{GX}, J_{GY}, J_{GZ}$ : **Momentos Centrais Principais de Inércia.**