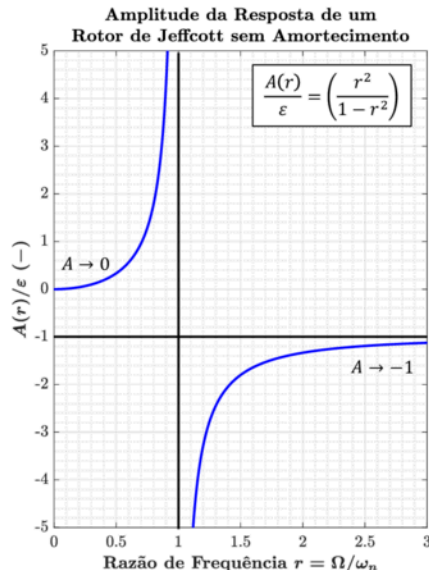


❑ Velocidade Crítica de Rotores

➤ Velocidade Crítica

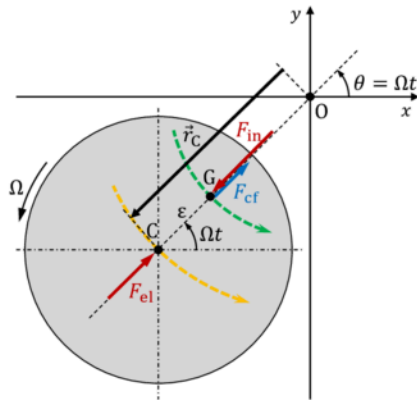
- A amplitude da órbita circular do centro geométrico do rotor depende da razão de frequência r . Veja gráfico ao lado.
- Quando a velocidade de rotação do rotor coincide com a frequência natural do sistema rotativo ($r = 1$), as forças de desbalanceamento excitam o modo de ressonância do rotor, resultando em órbitas com amplitudes elevadas ($A \rightarrow \infty$).
- A velocidade de rotação do rotor que coincide com a frequência natural do sistema rotativo é denominada **velocidade crítica** ($\Omega_{cr} = \omega_n$).
- Frequência natural e velocidade de rotação do rotor são conceitos distintos:
 - A frequência natural (ω_n) é uma **propriedade** do sistema rotativo, enquanto que a velocidade de rotação (Ω) é uma característica **operacional** do rotor.
 - Quando efeitos giroscópicos **não** são considerados, as frequências naturais do sistema rotativo **independem** da velocidade de rotação do rotor.
- Sistemas rotativos reais possuem várias frequências naturais.



24

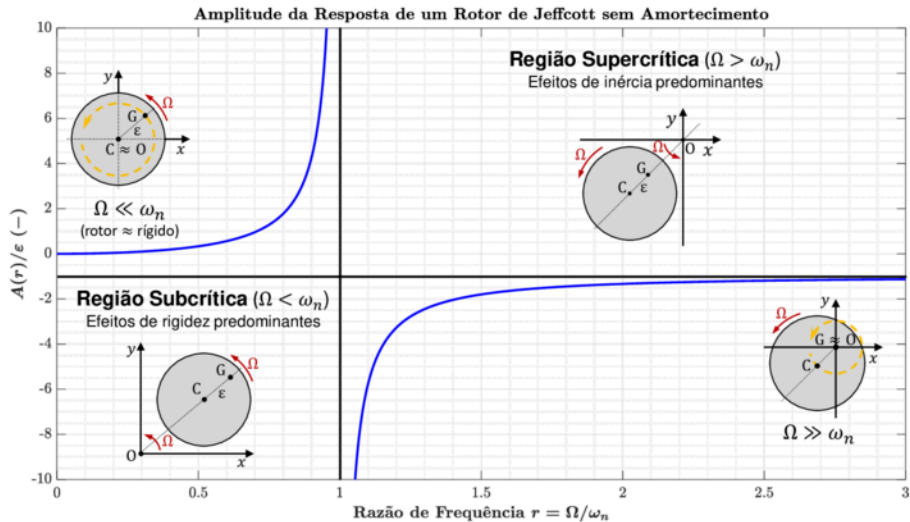
❑ Velocidade Crítica de Rotores

- Dependendo da relação entre a velocidade angular de operação (Ω) e a velocidade crítica (Ω_{cr}) do rotor, duas condições de operação são identificadas:
- **Condição Supercrítica:** $\Omega > \Omega_{cr}$
 - A amplitude do *whirling* é **negativa** ($A < 0$), ou seja, com **fase invertida** em relação à excitação (força centrífuga – desbalanceamento estático). Atenção para a diferença entre força de inércia **total** (\vec{F}_{in}) e força centrífuga (\vec{F}_{cf}).
 - A magnitude da amplitude do *whirling* **diminui** a partir de Ω_{cr} e tende a ε à medida que $\Omega \rightarrow \infty$;
 - Os pontos O, C e G são **alinhados na ordem OGC**, ou seja, a órbita do centro de massa (G) é **interna** à do centro geométrico (C);
 - Para $\Omega \gg \Omega_{cr}$, o centro de massa (G) tende a permanecer em repouso ($G \cong O$) e o centro de geométrico (C) tende a girar em torno de G;
 - O comportamento dinâmico do rotor é dominado pelos efeitos de **inércia** do sistema.



Plano médio do disco com eixo deformado e equilíbrio de forças no referencial do rotor. Condição Supercrítica.

❑ Velocidade Crítica de Rotores



❑ Velocidade Crítica de Rotores

➤ Equilíbrio de Forças no Referencial do Rotor

- Sabendo *a priori* que o movimento do rotor é **síncrono** e que os pontos O, C e G permanecem alinhados durante o movimento (**válido apenas para sistemas não amortecidos**), a velocidade crítica do rotor pode ser obtida a partir do equilíbrio de forças **no referencial do rotor na direção OCG** (equilíbrio dinâmico – Princípio de D'Alembert):

$$\underbrace{F_{el}}_{\text{Força elástica do eixo}} + \underbrace{F_{in}}_{\text{Força de inércia (centrífuga)}} = 0 \Rightarrow -k_e A + m\Omega^2(A + \varepsilon) = 0$$

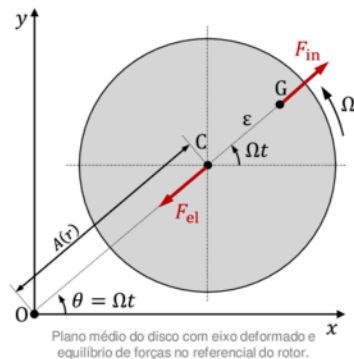


$$-k_e A + m\Omega^2 A + m\Omega^2 \varepsilon = 0 \Rightarrow (k_e - m\Omega^2)A = m\Omega^2 \varepsilon$$

- Finalmente:

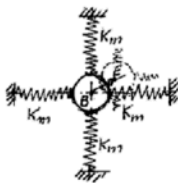
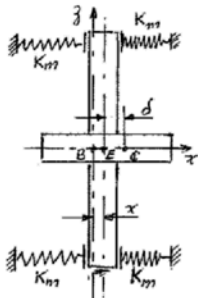
$$A = \frac{m\Omega^2 \varepsilon}{(k_e - m\Omega^2)} \Rightarrow$$

$$A(r) = \varepsilon \left(\frac{r^2}{1 - r^2} \right), \quad r = \frac{\Omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$



❑ Velocidade Crítica de Rotores

- Os conceitos e resultados mostrados anteriormente são também válidos para outras configurações de flexibilidade do conjunto rotor-mancal.
- Para outras configurações, utiliza-se o conceito de **rigidez equivalente** para a determinação da frequência natural do sistema.
- **Rotor rígido apoiado em mancais flexíveis isotrópicos (RR-MF)**

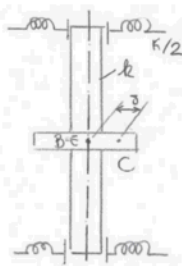


- Rigidez equivalente (molas em paralelo): $k_{eq} = 4k_m$

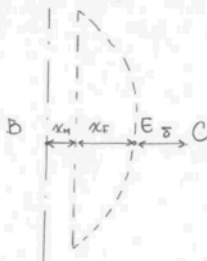
- Frequência natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4k_m}{m}}$

❑ Velocidade Crítica de Rotores

- Os conceitos e resultados mostrados anteriormente são também válidos para outras configurações de flexibilidade do conjunto rotor-mancal.
- Para outras configurações, utiliza-se o conceito de **rigidez equivalente** para a determinação da frequência natural do sistema.
- **Rotor flexível apoiado em mancais flexíveis isotrópicos (RF-MF)**



Configuração Inicial



Configuração Deformada

- Rigidez equivalente (molas em série):

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{4k_m} + \frac{1}{k_e} \rightarrow k_{eq} = \frac{4k_mk_e}{4k_m + k_e}$$

- Frequência natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4k_mk_e}{m(4k_m + k_e)}}$



□ Referências

1. Genta, G., 2005. Dynamics of Rotating Systems, Mechanical engineering series. Springer, New York.
2. Yoon, S.Y., Lin, Z., Allaire, P.E., 2013. Introduction to Rotor Dynamics, in: Control of Surge in Centrifugal Compressors by Active Magnetic Bearings, Advances in Industrial Control. Springer London, London, pp. 17–55.
3. Ehrich, F.F., 2004. Handbook of Rotordynamics, 3rd edition. ed. Krieger Pub Co, Malabar, Fla. Chapters 2-3.
4. Gunter, E.J., 2001. Introduction to Rotor Dynamics - Critical Speed and Unbalance Response Analysis.
5. Gunter, E.J., 2002. Fundamentals of Rotor Bearing Dynamics.



PME3400 – Vibrações

Balanceamento de Rotores

Prof. Francisco J. Profito

fprofito@usp.br



Conteúdo

1. Introdução e Objetivos
2. Tipos de Desbalanceamento
3. Rotores Rígidos Apoiados em Mancais Rígidos
 - 3.1 Esforços nos Mancais
 - 3.2 Balanceamento “Teórico”
 - 3.3 Classes de Balanceamento
4. Máquinas de Balanceamento
 - 4.1 Máquinas de Balanceamento de Mancais Rígidos
 - 4.2 Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis
5. Referências