



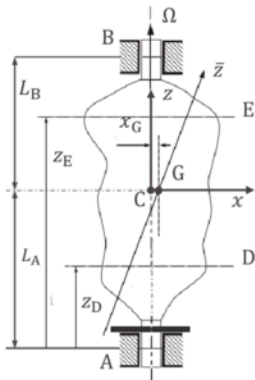
Conteúdo

1. Introdução e Objetivos
2. Principais Componentes de Sistemas Rotativos
- 3. Tipos Fundamentais de Rotores**
4. Velocidade Crítica de Rotores
5. Referências

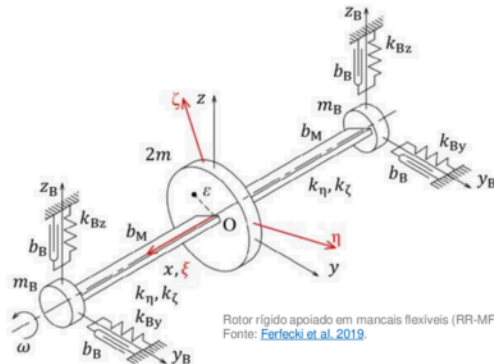
❑ Tipos Fundamentais de Rotores

➤ Dependendo da rigidez e amortecimento do conjunto rotor-mancais, quatro tipos fundamentais de rotores podem ser definidos:

▪ Rotor rígido apoiado em mancais rígidos (RR-MR)



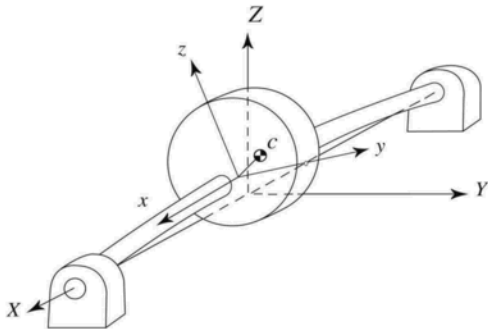
▪ Rotor rígido apoiado em mancais flexíveis (RR-MF)



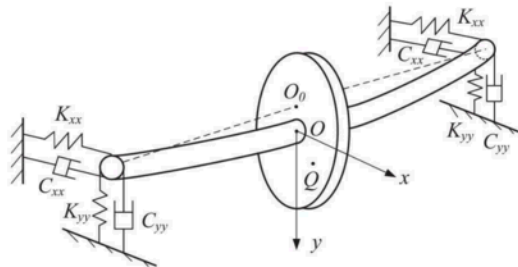
Rotor rígido apoiado em mancais flexíveis (RR-MF).
Fonte: [Ferrecki et al. 2019](#).

❑ Tipos Fundamentais de Rotores

- Dependendo da rigidez e amortecimento do conjunto rotor-mancais, quatro tipos fundamentais de rotores podem ser definidos:
- Rotor flexível apoiado em mancais rígidos (RF-MR)
- Rotor flexível apoiado em mancais flexíveis (RF-MF)



Rotor flexível apoiado em mancais rígidos (RF-MR). Fonte: [Perdersen, E., 2009](#).



Rotor flexível apoiado em mancais flexíveis (RF-MF). Fonte: [Chen et al., 2023](#)



Conteúdo

1. Introdução e Objetivos
2. Principais Componentes de Sistemas Rotativos
3. Tipos de Rotores
- 4. Velocidade Crítica de Rotores**
5. Referências



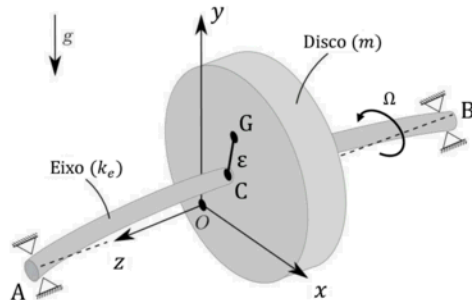
❑ Velocidade Crítica de Rotores

- A teoria de vibração de sistemas rotativos flexíveis foi desenvolvida inicialmente por August Föppl (Alemanha, 1895) e Henry Jeffcott (Inglaterra, 1919).
- Os autores desenvolveram um **modelo analítico simplificado** que considera a **flexibilidade do conjunto rotor-mancais**, e estabeleceram a teoria básica para o cálculo das vibrações laterais de rotores.
- O modelo simplificado desenvolvido, comumente conhecido como **rotor de Föppl/Jeffcott**, fornece **resultados qualitativos** importantes sobre as características básicas do comportamento dinâmico de rotores reais.
- Características básicas da dinâmica de rotores fornecidas pelo modelo de Föppl/Jeffcott:
 - Velocidades críticas (principalmente a 1ª crítica);
 - Órbita do centro geométrico do rotor (*whirling*) e posição relativa entre o centro de massa e o centro geométrico do rotor.

❑ Velocidade Crítica de Rotores

➤ Rotor de Föppl/Jeffcott não-Amortecido:

- Rotor flexível apoiado em mancais rígidos;
- Disco rígido de massa m , com desbalanceamento estático ε , acoplado ao eixo no plano médio entre mancais;
- Eixo flexível de rigidez k_e (rigidez de flexão), simétrico, homogêneo, isotrópico e de massa desprezível ($m_e \ll m$);
- Amortecimentos (mancais, estrutural e movimento lateral do disco) desprezíveis;
- Rotor rotaciona com velocidade angular Ω **constante**;
- Efeitos giroscópicos do disco desprezível (o movimento do disco ocorre no plano Oxy).



Rotor de Föppl/Jeffcott. Fonte: adaptado de [Boy, F. 2020](#).

- **Sistema de referência principal:** sistema de coordenadas $Oxyz$, de base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, solidário ao referencial fixo (mancais/estator), com Oz coincidente com o eixo entre mancais.
- **Coordenadas:** x_C e y_C (centro geométrico do rotor)

❑ Velocidade Crítica de Rotores

- O vetor posição e a aceleração do centro de massa G do rotor são expressos no sistema $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, como segue:

$$\vec{r}_G = \vec{r}_C + \vec{r}_{G/C} = (x_C \hat{i} + y_C \hat{j}) + \varepsilon (\cos \Omega t \hat{i} + \sin \Omega t \hat{j})$$

$$\vec{r}_G = (x_C + \varepsilon \cos \Omega t) \hat{i} + (y_C + \varepsilon \sin \Omega t) \hat{j} \quad (1)$$

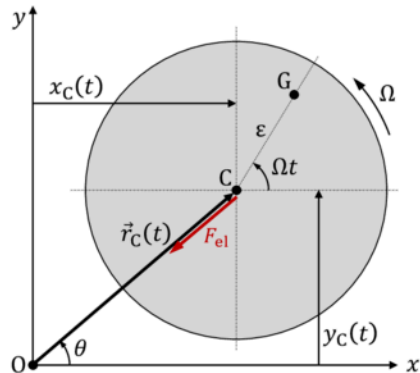
$$\vec{a}_G = \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = (\ddot{x}_C - \varepsilon \Omega^2 \cos \Omega t) \hat{i} + (\ddot{y}_C - \varepsilon \Omega^2 \sin \Omega t) \hat{j} \quad (2)$$

- Aplicando o TMB ao disco e considerando apenas os **esforços dinâmicos**, obtém-se as seguintes equações de movimento do disco:

$$\vec{R}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G \rightarrow \vec{F}_{\text{el}} = m(\ddot{x}_C - \varepsilon \Omega^2 \cos \Omega t) \hat{i} + m(\ddot{y}_C - \varepsilon \Omega^2 \sin \Omega t) \hat{j}$$

Com:

$$\vec{F}_{\text{el}} = -k_e |\vec{r}_C| \left(\frac{\vec{r}_C}{|\vec{r}_C|} \right) = -k_e \vec{r}_C = -k_e (x_C \hat{i} + y_C \hat{j})$$



Plano médio do disco com eixo deformado ($O = C$ na posição com eixo indeformado).

- Equações desacopladas, ou seja, o movimento do ponto C nas direções Ox e Oy são independentes.
- Sistema autoexcitado pelo desbalanceamento estático.

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_C + k_e x_C &= m \varepsilon \Omega^2 \cos \Omega t \\ m \ddot{y}_C + k_e y_C &= m \varepsilon \Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3)$$

❑ Velocidade Crítica de Rotores

- A **solução particular** de regime permanente das equações de movimento do rotor tem a forma:

$$x_C(t) = X_C \cos \Omega t \quad \text{e} \quad y_C(t) = Y_C \sin \Omega t \quad (4)$$

- Introduzindo as expressões acima e as respectivas acelerações nas equações de movimento (Eq. 3), obtém-se as seguintes equações algébricas:

$$\begin{aligned} (-m\Omega^2 + k_e)X_C \cos \Omega t &= m\varepsilon\Omega^2 \cos \Omega t \\ (-m\Omega^2 + k_e)Y_C \sin \Omega t &= m\varepsilon\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (-m\Omega^2 + k_e)X_C &= m\varepsilon\Omega^2 \\ (-m\Omega^2 + k_e)Y_C &= m\varepsilon\Omega^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X_C &= \frac{m\varepsilon\Omega^2}{(k_e - m\Omega^2)} \\ Y_C &= \frac{m\varepsilon\Omega^2}{(k_e - m\Omega^2)} \end{aligned} \quad (5)$$

- Substituindo as amplitudes X_C e Y_C na Eq. 4, obtém-se as expressões finais da **solução particular**:

$$\underbrace{X_C = Y_C}_{\text{Amplitudes iguais}} = \frac{m\varepsilon\Omega^2}{(k_e - m\Omega^2)} = \varepsilon \left(\frac{r^2}{1 - r^2} \right), \quad \underbrace{r = \frac{\Omega}{\omega_n}}_{\text{Razão de frequência}}, \quad \underbrace{\omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m}}}_{\text{Frequência natural do sistema (propriedade do sistema!)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x_C(t) &= \left(\frac{r^2}{1 - r^2} \right) \varepsilon \cos \Omega t \\ y_C(t) &= \left(\frac{r^2}{1 - r^2} \right) \varepsilon \sin \Omega t \end{aligned}} \quad (6)$$

❑ Velocidade Crítica de Rotores

- A **solução particular** de regime permanente das equações de movimento do rotor tem a forma:

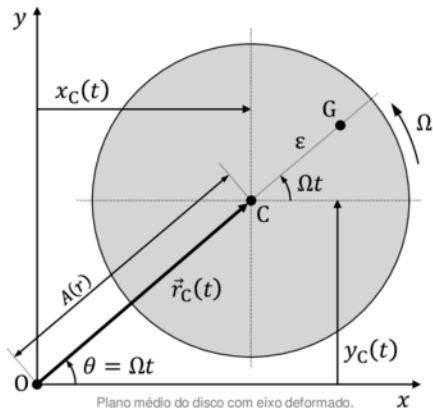
$$\vec{r}_C(t) = (x_C \hat{i} + y_C \hat{j}) = \left(\sqrt{x_C^2 + y_C^2} \right) [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}]$$

- Substituindo a **solução particular** final (Eq. 6) na expressão acima, o vetor posição do centro **geométrico** do rotor fica:

$$\vec{r}_C(t) = \left(\frac{\varepsilon r^2}{1 - r^2} \right) [\cos \Omega t \hat{i} + \sin \Omega t \hat{j}] = \left(\frac{\varepsilon r^2}{1 - r^2} \right) [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}]$$

- Como $\theta = \Omega t$, os pontos O, C e G permanecem alinhados durante o movimento. Portanto, o vetor posição do centro **geométrico** do rotor pode ser expresso como:

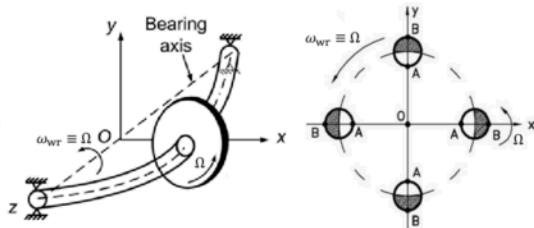
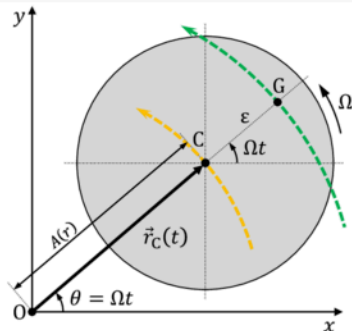
$$\vec{r}_C(t) = A(r) [\cos \Omega t \hat{i} + \sin \Omega t \hat{j}], \quad A(r) = \varepsilon \left(\frac{r^2}{1 - r^2} \right) \quad (7)$$



❑ Velocidade Crítica de Rotores

➤ Whirling Síncrono

- Como os pontos O, C e G permanecem alinhados durante o movimento, então $\vec{r}_C \parallel \vec{r}_{G/C}$.
- O vetor $\vec{r}_C(t)$ rotaciona no plano Oxy com a mesma velocidade angular Ω do rotor, i.e. $\omega_{wr} \equiv \Omega$ (**movimento síncrono**).
- O centro geométrico C do rotor descreve uma **trajetória circular** no plano Oxy com velocidade de rotação igual à velocidade angular Ω do rotor.
- Esse movimento circular síncrono do centro geométrico C do rotor é geralmente denominado **whirling síncrono circular**.
- Todos os pontos do rotor descrevem uma trajetória circular com ausência de movimento vibratório.
- O alinhamento dos pontos O, C e G ocorre apenas em sistemas não amortecidos.



Movimento geral de um rotor de Föppl/Jeffcott e ilustração do whirling síncrono circular. A área hachurada da seção transversal do eixo está tensionada. Fonte: [1].