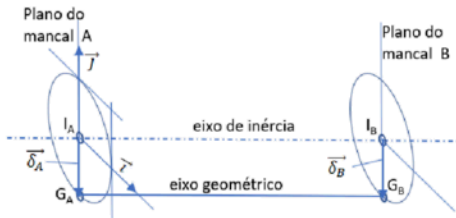


❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Efeito de uma Massa de Desbalanceamento nos Deslocamentos dos Mancais

- Adicionando-se uma massa $m \ll M$, no **plano radial pelo centro de massa** do rotor, a um raio R e na posição angular indicada, tem-se:



$$\vec{\Delta}_i = (I_i - G_i), \quad \vec{\delta}_i = -\vec{\Delta}_i = (G_i - I_i) \quad (30)$$

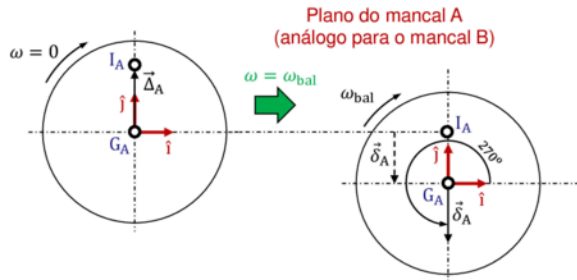
I_i : traços do eixo central principal longitudinal de inércia (fixo no espaço).

G_i : traços do eixo geométrico (se movimentam em relação a I_i).

$\vec{\Delta}_i$: deslocamentos nos planos dos mancais do **eixo central de inércia em relação ao eixo geométrico**.

$\vec{\delta}_i$: deslocamentos nos planos dos mancais do **eixo geométrico em relação ao eixo central de inércia**.

- Traços dos eixos geométrico e central de inércia no **sistema de referência do rotor**:

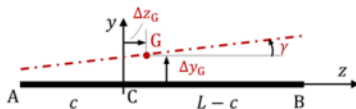
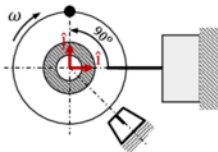
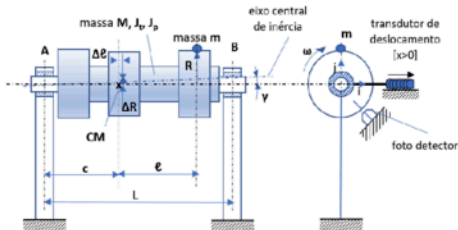


A adição da massa no plano radial pelo centro de massa causou **somente** translação do eixo principal central de inércia **na direção** da massa e os deslocamentos dos mancais no tempo ficaram iguais.

❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Efeito de uma Massa de Desbalanceamento nos Deslocamentos dos Mancais

- Adicionando-se agora uma massa $m \ll M$, em um **plano radial distante ℓ do plano pelo centro de massa do rotor**, a um raio R e na posição angular indicada, tem-se:



- Desbalanceamento adicionado:

$$\vec{u}_{des} = u_{des} \angle 90^\circ = mR \angle 90^\circ = mR \hat{j}$$

- Deslocamento do Centro de Massa*:

$$\Delta x_G = 0, \quad \Delta y_G = \frac{mR}{M}, \quad \Delta z_G = \frac{m\ell}{M}$$

- Inclinação do Eixo Central Longitudinal de Inércia ($\omega = 0$)*:

$$\gamma = \frac{mR\ell}{J_t - J_p}, \quad J_t \neq J_p$$

- Deslocamentos do Eixo Central de Inércia nos Planos dos Mancais ($\omega = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_A &= (\Delta y_G - c\gamma) \hat{j} = \left(\frac{1}{M} - \frac{c\ell}{J_t - J_p} \right) \vec{u}_{des} \\ \vec{\Delta}_B &= [\Delta y_G + (L - c)\gamma] \hat{j} = \left[\frac{1}{M} + \frac{(L - c)\ell}{J_t - J_p} \right] \vec{u}_{des} \end{aligned} \quad (31)$$

❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Efeito de uma Massa de Desbalanceamento nos Deslocamentos dos Mancais

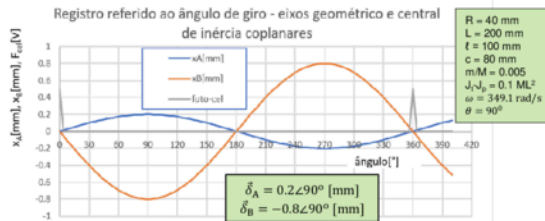
- Adicionando-se agora uma massa $m \ll M$, em um **plano radial distante ℓ do plano pelo centro de massa do rotor**, a um raio R e na posição angular indicada, tem-se:
- Deslocamentos **Medidos** do Eixo Central de Inércia nos Planos dos Mancais ($\omega = \omega_{bal}$):
- Registro no tempo da **componente horizontal dos deslocamentos dos mancais** (projeção horizontal dos deslocamentos no sistema de coordenadas fixo aos mancais):

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_A &= -\vec{\Delta}_A = -\left(\frac{1}{M} - \frac{c\ell}{J_t - J_p}\right)\vec{u}_{des} \\ \vec{\delta}_B &= -\vec{\Delta}_B = -\left[\frac{1}{M} + \frac{(L-c)\ell}{J_t - J_p}\right]\vec{u}_{des}\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}X_A(t) &= -\left(\frac{1}{M} - \frac{c\ell}{J_t - J_p}\right)u_{des} \cos(\omega t - 90^\circ) \\ X_B(t) &= -\left[\frac{1}{M} + \frac{(L-c)\ell}{J_t - J_p}\right]u_{des} \cos(\omega t - 90^\circ)\end{aligned}, \quad u_{des} = mR \quad (33)$$

$\vec{\Delta}_I$: deslocamentos nos planos dos mancais do **eixo central de inércia em relação ao eixo geométrico**; geralmente definidos com o rotor parado.

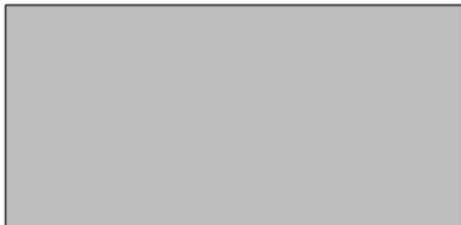
$\vec{\delta}_I$: deslocamentos nos planos dos mancais do **eixo geométrico em relação ao eixo central de inércia**; geralmente definidos com o rotor girando; deslocamentos dos mancais efetivamente medidos.



❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Efeito de uma Massa de Desbalanceamento nos Deslocamentos dos Mancais

- Adicionando-se agora uma massa $m \ll M$, em um **plano radial distante ℓ do plano pelo centro de massa do rotor**, a um raio R e na posição angular indicada, tem-se:



$$\vec{\Delta}_i = (I_i - G_i), \quad \vec{\delta}_i = -\vec{\Delta}_i = (G_i - I_i) \quad (30)$$

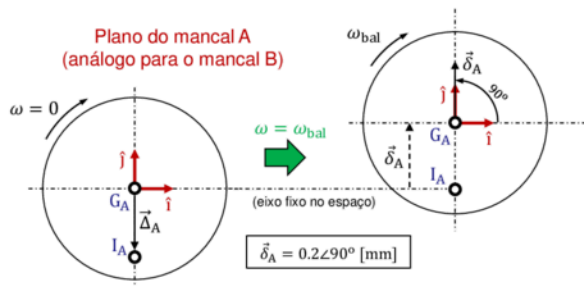
I_i : traços dos eixos centrais principais longitudinais de inércia (fixos no espaço).

G_i : traços dos eixos geométricos (se movimentam em relação a I_i).

$\vec{\Delta}_i$: deslocamentos nos planos dos mancais do **eixo central de inércia em relação ao eixo geométrico**.

$\vec{\delta}_i$: deslocamentos nos planos dos mancais do **eixo geométrico em relação ao eixo central de inércia**.

- Traços dos eixos geométrico e central de inércia no **sistema de referência do rotor**:

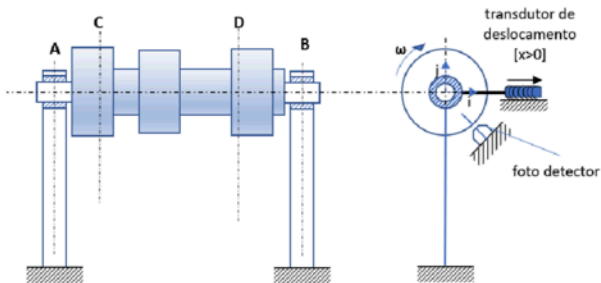


A adição da massa no plano radial pelo centro de massa provocou a **translação e inclinação** do eixo principal central de inércia **na direção** da massa e os deslocamentos dos mancais no tempo ficaram diferentes.

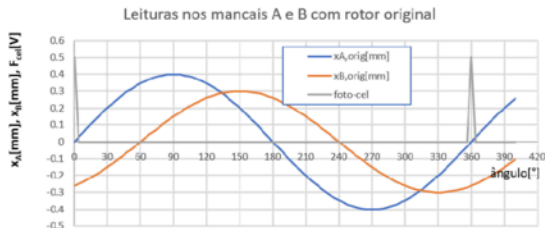
❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Exemplo de Balanceamento (Caso Geral)

- Digamos, agora, que o rotor instalado na balanceadora está **desbalanceado**, e as leituras dos transdutores de deslocamentos dos mancais **A** e **B**, juntamente com o sinal de referência da fotocélula são os do gráfico mostrado. Deseja-se calcular os valores de $m_C R_C$ e $m_D R_D$ a serem **adicionados** nos planos de balanceamento **C** e **D**, assim como suas posições angulares, para balancear o rotor.



Deslocamentos em geral distintos e sem informações sobre o plano de desbalanceamento estático.



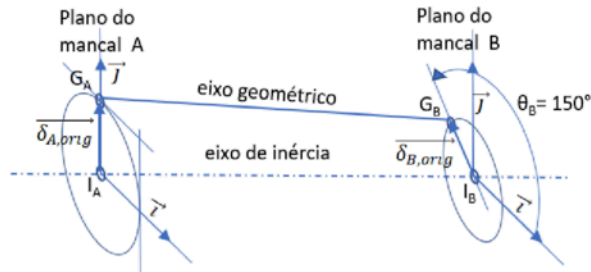
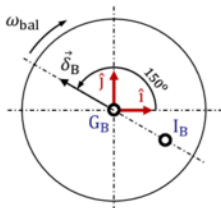
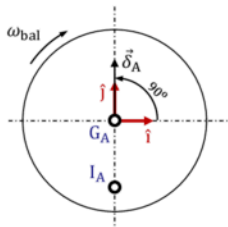
$$\vec{\delta}_A = 0.4 \angle 90^\circ = 0.4j \text{ [mm]}$$

$$\vec{\delta}_B = 0.3 \angle 150^\circ = (-0.26i + 0.15j) \text{ [mm]}$$

❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Exemplo de Balanceamento (Caso Geral)

- Traços dos eixos geométrico e central de inércia no sistema de referência do rotor:



Posições relativas dos eixos geométrico e principal de inércia.
Esses eixos são, geralmente, **reversos no espaço**.



❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Exemplo de Balanceamento (Caso Geral)

- Para a realização do balanceamento, massas devem ser adicionadas nos planos de balanceamento **C** e **D** de forma a **anularem os deslocamentos nos mancais** (procedimento análogo ao de balanceadoras de mancais rígidos):

$$\vec{\delta}_A + \vec{\delta}_{CA} + \vec{\delta}_{DA} = \vec{0}, \quad \vec{\delta}_B + \vec{\delta}_{CB} + \vec{\delta}_{DB} = \vec{0} \quad (34)$$

$\vec{\delta}_A, \vec{\delta}_B$: deslocamentos **medidos** dos mancais do rotor **original desbalanceado**.

$\vec{\delta}_{CA}, \vec{\delta}_{DA}$: efeito da adição das massas m_C e m_D no deslocamento do **mancal A**.

$\vec{\delta}_{CB}, \vec{\delta}_{DB}$: efeito da adição das massas m_C e m_D no deslocamento do **mancal B**.

- A influência da adição das massas de balanceamento nos planos **C** e **D** nos deslocamentos dos mancais poderia ser determinada a partir das Eqs. 31-32, ou seja:

$$\vec{\delta}_{CA} = -\vec{\Delta}_{CA}, \quad \vec{\delta}_{DA} = -\vec{\Delta}_{DA}, \quad \vec{\delta}_{CB} = -\vec{\Delta}_{CB}, \quad \vec{\delta}_{DB} = -\vec{\Delta}_{DB} \quad (35)$$

- Entretanto, os momentos polar e transversal de inércia do rotor, e portanto ($J_t - J_p$), são **geralmente desconhecidos**.
- Dessa forma, é mais prático e usual utilizar **massas de teste m_t conhecidas que são adicionadas em posições angulares pré-estabelecidas** nos planos de balanceamento e determinar diretamente seus efeitos nos registros de deslocamento dos mancais, determinando-se “**coeficientes de influência**” [mm/g], uma vez que estamos tratando de um sistema linear ($m_t \ll M$ e com $J_t \neq J_p$).

❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Exemplo de Balanceamento (Caso Geral)

- O efeito da adição das massas de balanceamento m_C e m_D nos deslocamentos dos mancais pode ser expressa, como segue:

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{CA} &= \alpha_{CA} \vec{u}_C, & \vec{\delta}_{DA} &= \alpha_{DA} \vec{u}_D \\ \vec{\delta}_{CB} &= \alpha_{CB} \vec{u}_C, & \vec{\delta}_{DB} &= \alpha_{DB} \vec{u}_D\end{aligned}\quad (36)$$

$\vec{u}_C = m_C R_C \angle \theta_C$, $\vec{u}_D = m_D R_D \angle \theta_D$: balanceamentos nos planos de balanceamento.

α_{ij} : coeficiente de influência associado ao efeito da adição de massa no plano "i" no deslocamento do mancal "j"

- Portanto, substituindo a Eq. 36 na Eq. 34, tem-se:

$$\vec{\delta}_A + \alpha_{CA} \vec{u}_C + \alpha_{DA} \vec{u}_D = \vec{0}, \quad \vec{\delta}_B + \alpha_{CB} \vec{u}_C + \alpha_{DB} \vec{u}_D = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_C \\ \vec{u}_D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{\delta}_A \\ \vec{\delta}_B \end{bmatrix} \quad (37)$$

- Resolvendo o sistema linear da Eq. 37 (usar calculadora), determina-se \vec{u}_C e \vec{u}_D que balanceiam o rotor:

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_C \\ \vec{u}_D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\delta}_A \\ \vec{\delta}_B \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\vec{u}_C &= m_C R_C \angle \theta_C \\ \vec{u}_D &= m_D R_D \angle \theta_D\end{aligned} \quad (38)$$

❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Exemplo de Balanceamento (Caso Geral)

- Para se determinar os coeficientes de influência, adicionam-se duas massas de teste m_t ao rotor:
 - Uma no **plano C**, no raio R_C no qual será feito o balanceamento e na posição angular $\theta_{C,t}$: $\vec{u}_{C,t} = m_t R_C \angle \theta_{C,t}$
 - Uma no **plano D**, no raio R_D no qual será feito o balanceamento e na posição angular $\theta_{D,t}$: $\vec{u}_{D,t} = m_t R_D \angle \theta_{D,t}$
- Após a adição das duas massas de teste ao rotor e a colocação do rotor para girar, na mesma velocidade angular ω_{bal} do rotor na condição original, tomam-se as medidas de deslocamento dos mancais A e B no tempo.
- Uma vez que sendo $m_t \ll M$ e com $J_t \neq J_p$, as equações de deslocamento nos mancais são **lineares** com respeito a massas de balanceamento. Logo, aplicando o princípio da sobreposição de efeitos, tem-se:

$$\vec{\delta}_{A+t} = \vec{\delta}_A + \vec{\delta}_{A,t}, \quad \vec{\delta}_{B+t} = \vec{\delta}_B + \vec{\delta}_{B,t} \quad (39)$$

$\vec{\delta}_A$ e $\vec{\delta}_B$: deslocamento dos mancais do **rotor original** (medidos).
 $\vec{\delta}_{A+t}$ e $\vec{\delta}_{B+t}$: deslocamentos dos mancais do **rotor com as massas de teste** (medidos).
 $\vec{\delta}_{A,t}$ e $\vec{\delta}_{B,t}$: deslocamentos dos mancais **devidos ao efeito isolado das massas de teste**.

- Portanto, os deslocamentos dos mancais devidos ao **efeito isolado** das massas de teste são obtidos, como segue:

$$\vec{\delta}_{A,t} = \vec{\delta}_{A+t} - \vec{\delta}_A, \quad \vec{\delta}_{B,t} = \vec{\delta}_{B+t} - \vec{\delta}_B \quad (40)$$

❑ Máquinas de Balanceamento de Mancais Flexíveis

➤ Exemplo de Balanceamento (Caso Geral)

- O efeito da adição das **massas de teste** nos planos **C** e **D** nos deslocamentos dos mancais pode ser expresso a partir dos coeficientes de influência:

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{A,t} &= \vec{\delta}_{CA,t} + \vec{\delta}_{DA,t} \\ \vec{\delta}_{B,t} &= \vec{\delta}_{CB,t} + \vec{\delta}_{DB,t}\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}\vec{\delta}_{A,t} &= \alpha_{CA}\vec{u}_{C,t} + \alpha_{DA}\vec{u}_{D,t} \\ \vec{\delta}_{B,t} &= \alpha_{CB}\vec{u}_{C,t} + \alpha_{DB}\vec{u}_{D,t}\end{aligned} \quad (41) \quad \xrightarrow{\substack{\vec{\delta}_{A,t}, \vec{\delta}_{B,t}, \vec{u}_{C,t}, \vec{u}_{D,t} \\ \text{conhecidos!}}} \quad \alpha_{ij}$$

- Uma vez determinados os coeficientes de influência α_{ij} , o sistema linear da Eq. 37 pode ser resolvido para \vec{u}_C e \vec{u}_D que balanceiam o rotor.
- Voltando para o exemplo em análise**, as medidas de deslocamento dos mancais A e B no tempo após a adição das massas de teste são mostradas no gráfico ao lado.

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{A+t} &= (-0.1\hat{i} + 0.42\hat{j}) = 0.43\angle 103^\circ \text{ [mm]} \\ \vec{\delta}_{B+t} &= (-0.24\hat{i} + 0.03\hat{j}) = 0.24\angle 174^\circ \text{ [mm]}\end{aligned}$$

